قربانی صفاری

دوره کامل
ریاضیات دبیرستان

نه مقاله هندسه

بخش سوم
مخروطات
حالها

برای سال ششم ریاضی

کتابفروشی و چاپخانه
علی اکبر علمی

۳۰ ریال

کتابهای تازهٔ
قربانی - صفاری

روش حل مسائل هندسه

کتابیست که با ساده‌ترین بیان راه حل کردن مسائل
هندسه را بدانش آموزان می‌آموزد
دراین کتاب انواع مختلف مسائل هندسه دسته بندی
شده وضمن مثالهای متعدد روشهای مختلف برای حل
هردسته داده شده است

نه مقالهٔ هندسه

بهترین وجامع‌ترین کتاب هندسه‌ای که تاکنون
بزبان فارسی نوشته شده‌است

حل المسائل جبر - جلد اول

برای سالهای دوم و سوم وچهارم دبیرستان

شامل ۲۳۰۷ مسئلهٔ حل شده

نه مقالهٔ هندسه

بخش سوم

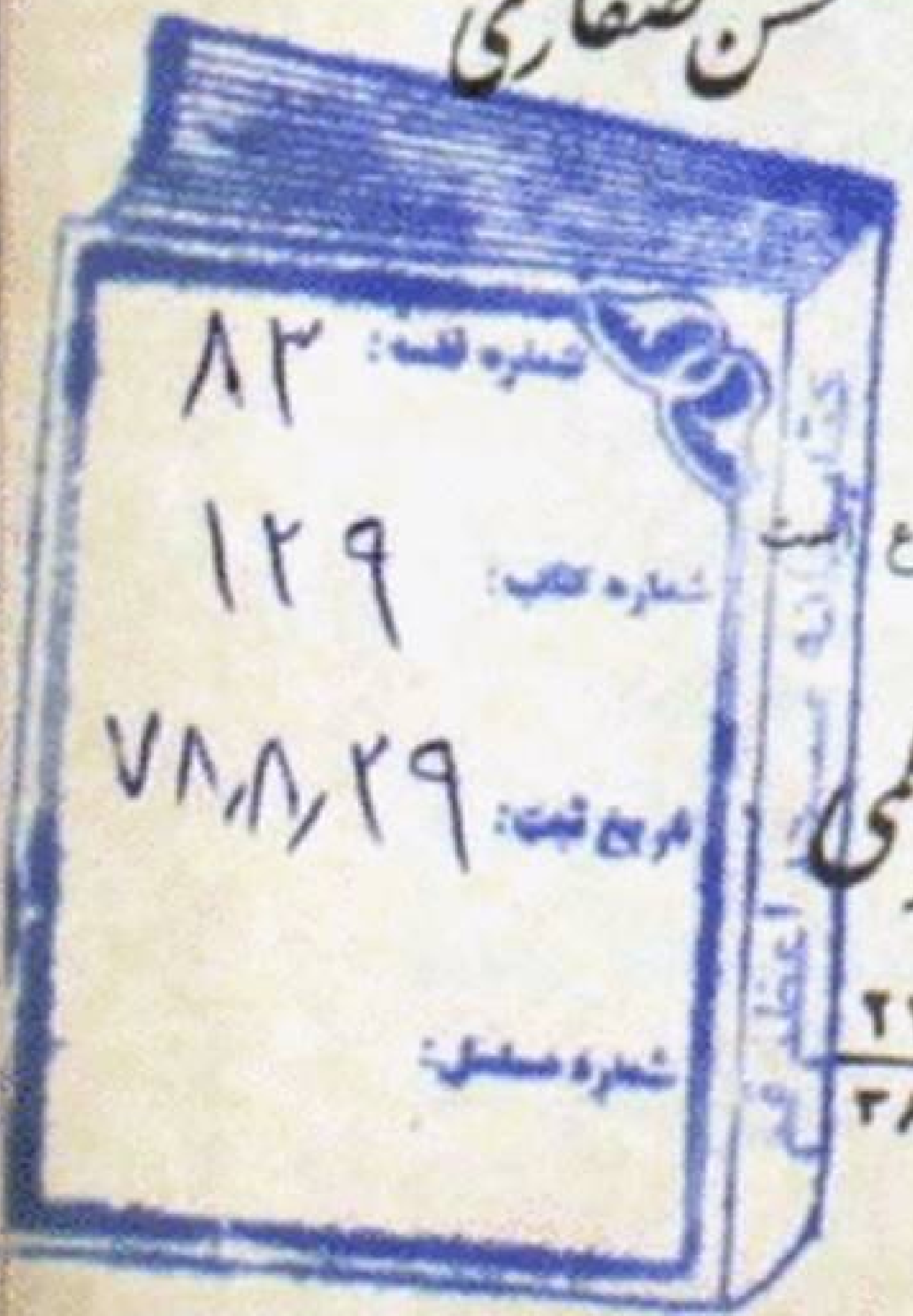
مخروطات - حاملها

برای سال ششم ریاضی

تألیف :

ابوالقاسم قربانی   حسن صفاری

معلمان علوم ریاضی



کتابفروشی وچاپخانه علی اکبر علمی
تهران - خیابان ناصرخسرو - تلفن ۲۱۲۸۳ - ۳۸۷۰۹

مقدمه

استقبال بی‌نظیری که همکاران گرامی از کتابهای ریاضی ما نمودند ما را بر آن داشت که همواره در رفع نقایص کار خود کوشا باشیم و تألیف یکدورهٔ کامل کتابهای ریاضی مقدماتی را وجههٔ همت خودسازیم.

چون درضمن تألیف و تدوین کتابهای هندسه‌ای که برای سالهای اول تا پنجم دبیرستان‌ها نگاشته‌ایم برنامهٔ رسمی تحصیلات متوسطه و میزان استعداد و فهم دانش‌آموزان را در سالهای مختلف دبیرستان در نظر داشته‌ایم ناچار سبك و روش این کتابها از حیث چگونگی بیان یکسان نیست

ازاینرو در زبان فارسی تألیف یك کتاب‌هندسهٔ مقدماتی جامع که هم از لحاظ سبك یکنواخت باشد و ترتیب منطقی و طبیعی قضایا و تعاریف در آن مراعات‌شود وهم ازحیث‌صحت ودقت مطلب بتواند مورد پسند و اطمینان اهل فن قرار گیرد لازم مینمود.

کتاب نه‌مقالهٔ **هندسه** که اینك بخش سوم آن از نظر خوانندهٔ محترم میگذرد باین‌منظور نوشته شده‌است.

دراین کتاب تا آنجا که میسر بوده‌است سعی کرده‌ایم که تعاریف جامع و استدلالها روشن و مطالب دقیق باشند.

چون تعریف ناحیه‌های داخل و خارج بیضی و هذلولی و سهمی بطریقی که متداول است بیهوده مایهٔ اطناب کلام مینمود این تعریف را درضمن حل مسئلهٔ مربوط بترسیم مماس از یك‌نقطهٔ معلوم بر هریك از منحنی‌های مزبور باختصار بیان کرده‌ایم.

قضایای پونسله را در مورد بیضی و هذلولی و سهمی بوجهی بیان و ثابت کرده‌ایم که استدلال درجمیع حالات صحیح‌باشد وبستگی بحاده یا منفرجه بودن برخی از زوایای شکل نداشته باشد.

دربارهٔ قضایای مربوط بتصویر دایره وبیضی و همچنین برای بیان خاصیت‌های مشترك مقطع‌های مخروطی روش تحلیلی را که ساده‌تر و طبیعی از روش هندسی است اختیار کرده‌ایم.

آرزومندیم که با نوشتن این کتاب خدمت شایسته‌ای بفرهنگ کشور و بزبان مادری خود کرده‌باشیم و این‌خدمت موردپسند صاحب نظران واقع گردد.

هر گونه انتقادی راکه دربارهٔ این کتاب خواه‌مستقیماً بمابنویسند و خواه در جراید منتشر فرمایند باحسن استقبال می‌پذیریم و از صمیم قلب از دانشمندانی که ما را بخطاهای خود واقف سازند سپاسگزار خواهیم بود.

تهران فروردین ماه ۱۳۳۲ هجری شمسی

ابوالقاسم قربانی　　　　حسن صفاری

نامهٔ ادارهٔ کل نگارش وزارت فرهنگ

بمؤلفین این کتاب

پیشنهاد شمارهٔ ۴۲۷۰ مورخ ۱۳۲۴/۷/۴ این اداره در پانصد و سی و یکمین جلسهٔ شورای عالی فرهنگ مورخ شنبه ۱۳۲۴/۷/۲۸ مطرح و چنین رأی داده شد:

کتابهای هندسه و هیئت تألیف آقایان حسن صفاری و ابوالقاسم قربانی شامل جمیع مواد برنامه میباشد و با اسلوبی بسیار جالب تهیه و چاپ شده است و چون فهم تعاریف و قضایای هندسه در حدود امکان بوسیلهٔ جمله‌های دقیق و مفید و مختصر برای دانش آموزان سهل و آسان شده است زحمات آقایان در تهیه و تنظیم قسمتهای مختلف کتب مذکور قابل تقدیر است.

مدیر کل نگارش

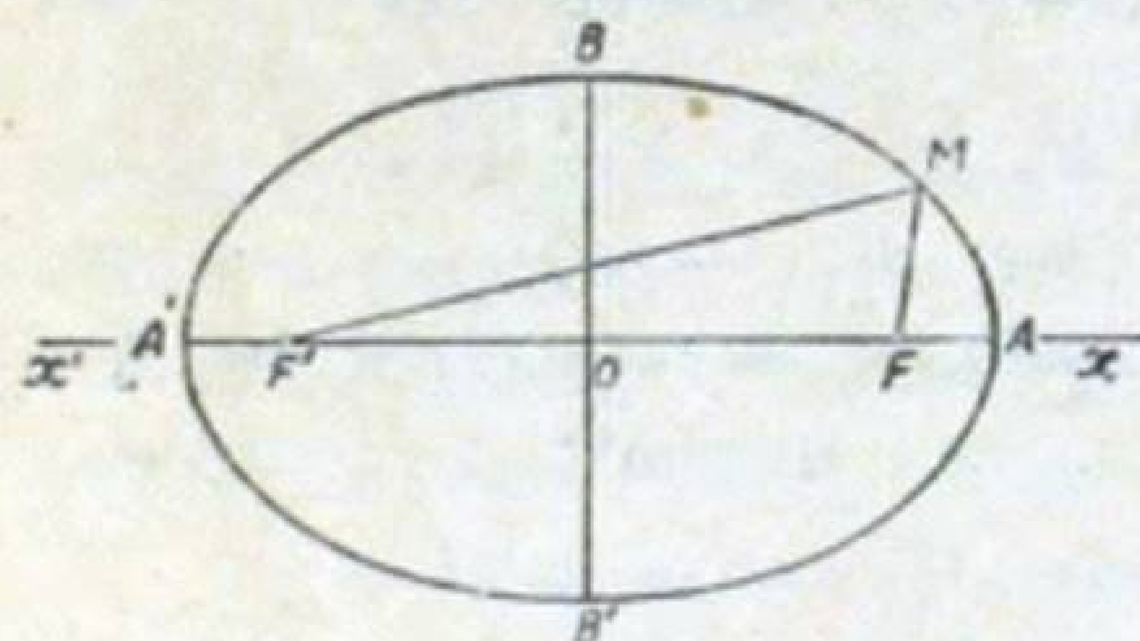
دکتر فرهمندی

بخش سوم - مخروطات و حاملها

مقالهٔ هشتم

۱ - بیضی

۸۴۱ - تعریف - در هر صفحه مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از دو نقطهٔ معلوم واقع در همان صفحه مساوی باطول معینی میباشد یک منحنی است که آنرا بیضی مینامند.



AA' = ۲a
FF' = ۲c

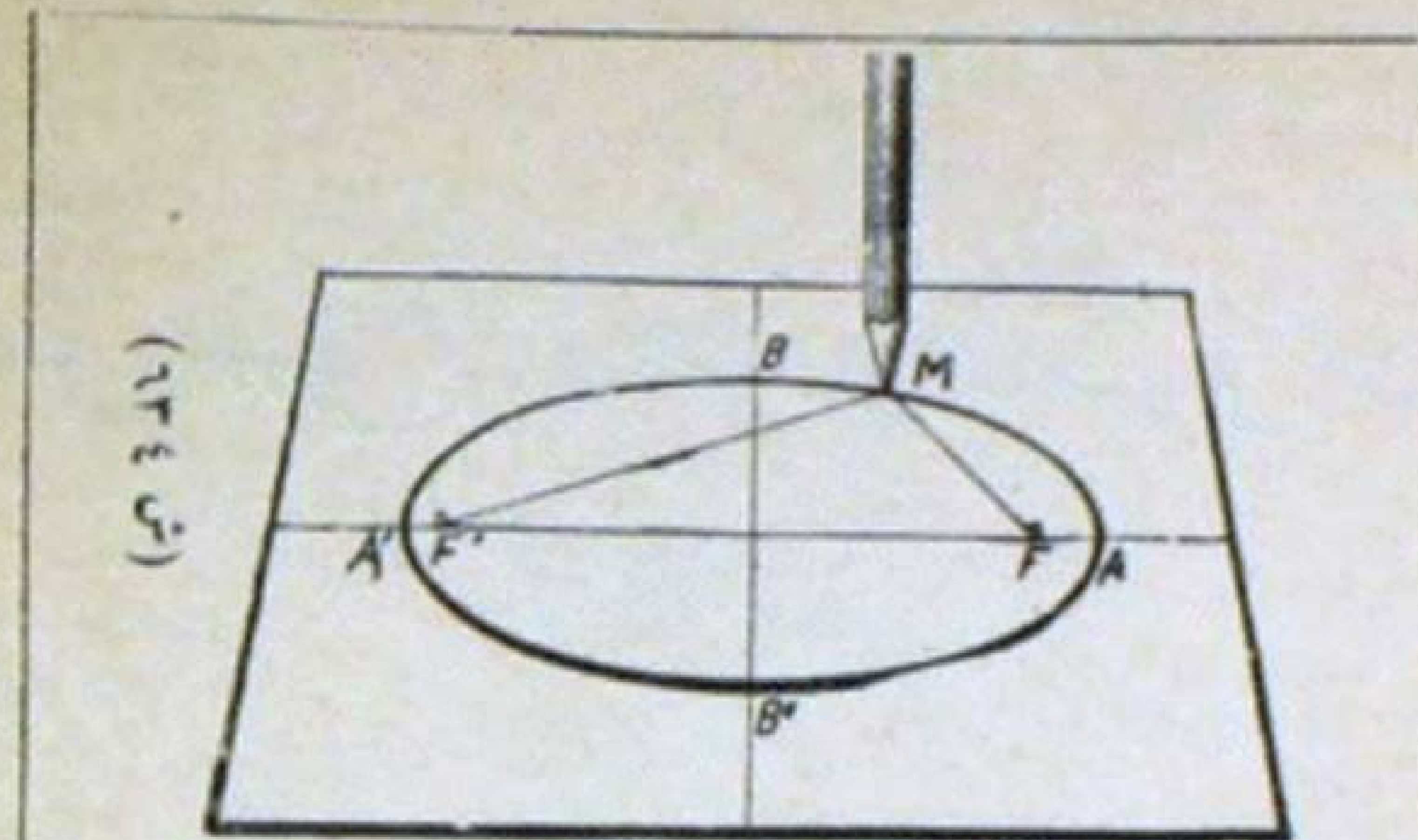
(ش ۶۳۳)

دو نقطهٔ معلوم را **کانونهای بیضی** میگویند. اگر کانونهای بیضی را F و F' و طول معین مزبور را ۲a بنامیم (ش ۶۳۳) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای مانند M روی بیضی باشد اینست که داشته باشیم:

(۱) $MF + MF' = ۲a$

هریک از قطعه خطهای MF و MF' را **شعاع حامل** نقطهٔ M و فاصلهٔ F'F را **فاصلهٔ کانونی** بیضی میگویند و این فاصله را معمولا ۲c مینامند.

اگر نقطه‌ای مانند M روی خط راست F'F واقع نباشد مجموع شعاع حاملهای آن یعنی MF+MF' از ۲c بزرگتر است زیرا در مثلث MFF' میتوان نوشت: $MF + MF' > FF'$



(ش ٦٣٤)

اگر دو سنجاق در نقاط F و F' نصب کنیم و دو سر نخی را گره بزنیم بطوریکه طول آن ۲c+۲a شود و نوک مدادی را بر نخ متکی کنیم و بکشیم و سپس نوک مداد را در حالیکه به نخ کشیده‌شده متکی باشد حرکت‌دهیم از حرکت نوک مداد (نقطهٔ M) یك بیضی رسم میشود زیرا MF+MF' همواره مساوی با ۲a است.

اگر نقطهٔ M روی یکی از دو نیم‌خط Fx و F'x' که از امتداد دادن FF' حاصل میشود واقع باشد باز هم MF+MF' بزرگتر از ۲c است ولی اگر نقطهٔ M روی قطعه خط FF' واقع باشد (ش ٦٣٣) مجموع شعاع حاملهای آن یعنی MF+MF' با ۲c مساویست.

از آنچه گذشت معلوم میشود که باید ۲a را بزرگتر از ۲c اختیار کرد.

یك بیضی با دردست بودن کانونها و مجموع شعاع حاملهای یکی از نقاطش مشخص میشود.

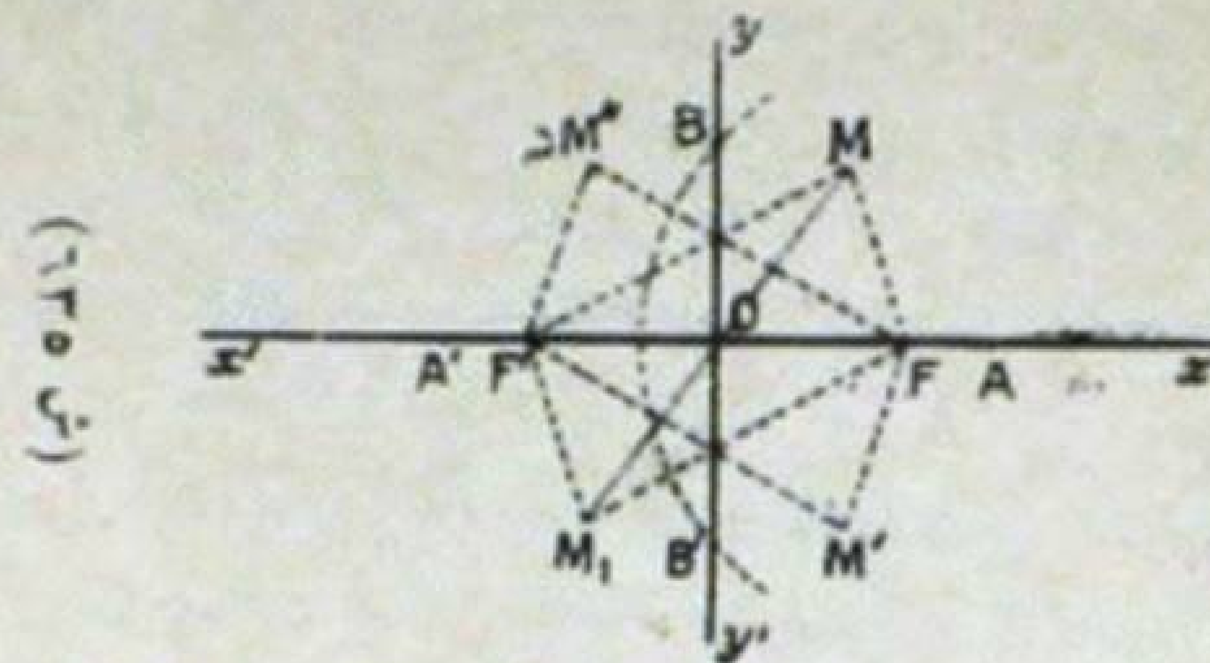
۸۳۲ – مرکز و محورها و رأسهای بیضی – فرض میکنیم F و F' کانونهای یك بیضی و ۲a مجموع شعاع‌حاملهای یکی از نقاط آن باشد. اگر نقطه‌ای مانند M روی این بیضی واقع باشد نقطهٔ M_1 قرینهٔ M نسبت بنقطهٔ O وسط قطعه خط FF' نیز روی همین بیضی واقع است (ش ٦٣٥) زیرا شکل MFM_1F' متوازی‌الاضلاع است.

و $M_1F' = MF$ و $M_1F = MF'$

وبنابراین $M_1F + M_1F' = 2a$

پس: **وسط قطعه‌خطی که دو کانون یك بیضی را بهم وصل میکند مرکز تقارن آن بیضی است.** این نقطه‌را **مرکز بیضی** میگویند.

خط راستی را که از نقاط F و F' میگذرد x'x و عمودمنصف قطعه خط F'F را y'y مینامیم. واضح است که نقاط M' و M'' که بترتیب قرینه‌های نقطهٔ M نسبت بخطوط x'x و y'y میباشند نیز روی بیضی واقع هستند (ش ٦٣٥) پس:

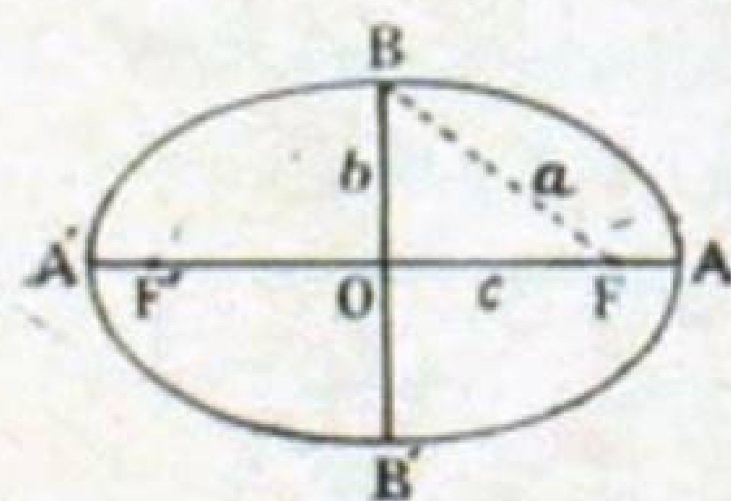


(ش ٦٣٥)

هرگاه F و F' کانونهای یك بیضی باشند خط F'F و عمود منصف قطعه‌خط F'F محورهای تقارن آن بیضی هستند.

اگر A نقطه‌ای از نیم خط Fx باشد (ش ٦٣٥) یکی از شعاعهای حامل این نقطه یعنی FA مساویست با OA − c و دیگری یعنی F'A مساویست با OA+c و مجموع ایندو شعاع حامل مساویست با ۲OA پس برای آنکه نقطهٔ A روی بیضی باشد لازم و کافیست که OA مساوی با a باشد. در اینصورت نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت بنقطهٔ O نیز روی بیضی است پس نقاط A و A' متعلق بخط راست x'x که از نقطهٔ O بفاصلهٔ a واقع هستند روی بیضی میباشند و A'A = ۲a

هر نقطه که روی y'y (عمودمنصف قطعه‌خط F'F) واقع باشد از F و F' بیك فاصله است. پس فصل‌مشترکهای خط y'y با بیضی نقاطی هستند که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ F مساوی با a باشد. این نقاط عبارتند از فصل مشترکهای خط y'y با دایره‌ای که مرکزش F و شعاعش a باشد. این دو نقطه‌را B و B' وطول قطعه‌خط BB' را ۲b مینامیم. از مثلث‌قائم‌الزاویهٔ BOF نتیجه میشود:



(ش ٦٣٦)

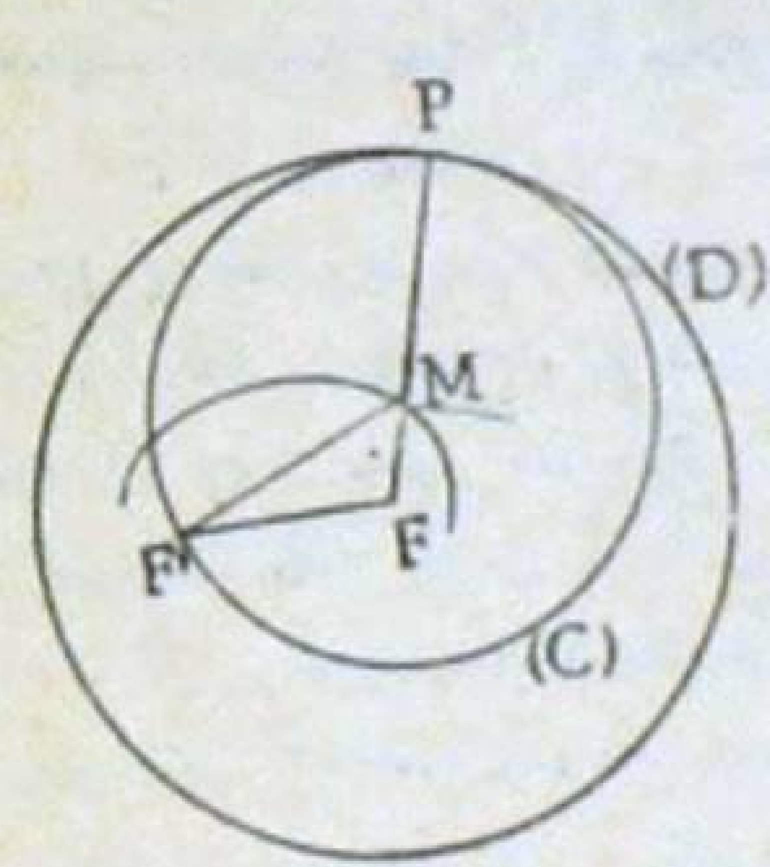
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

قطعه خط A'A را **محور اطول** بیضی و قطعه خط B'B را **محور اقصر** بیضی و نقاط A و A' و B و B' را **رأسهای بیضی** مینامند. گاهی

قطعه خط A'A وهمچنین خط راست AA' را **محور کانونی** نیز میگویند.

تبصره - اگر قطعه‌خطهای AA' و BB' برحسب وضع وطول معلوم باشند (ش ٦٣٦) بیضی مشخص است و در اینصورت کانونهای بیضی عبارتند از نقاط مشترک محور اطول با دایره‌ای که مرکزش B و شعاعش OA باشد.

۸۲۳ - دایره‌های هادی بیضی - فرض میکنیم F و F' کانونهای یک بیضی و 2a مجموع شعاع حاملهای یکی از نقاط آن باشد. اگر نقطهٔ M روی این بیضی واقع باشد و شعاع حامل MF را از طرف M بطول MP مساوی با MF' امتداد دهیم (ش ٦٣٧) طول قطعه‌خط FP مساوی با 2a میشود و نقطهٔ P روی دایره‌ای که بمرکز F و شعاع 2a رسم شود واقع است. این دایره را (D) مینامیم. واضح است که اگر بمرکز M و بشعاع MF' دایره‌ای رسم کنیم این دایره از نقطهٔ P میگذرد و در این نقطه با دایرهٔ (D) مماس میشود.



(ش ٦٣٧)

برعکس فرض میکنیم M مرکز دایره‌ای مانند (C) باشد که از نقطهٔ F' بگذرد و با دایرهٔ (D) مماس باشد. چون نقطهٔ F' درداخل دایرهٔ (D) واقع است دایرهٔ (C) نیز در داخل دایرهٔ (D) واقع میباشد و طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ (C) و (D) یعنی MF مساویست با تفاضل شعاعهای آنها یعنی 2a − MF' و از اینجا نتیجه میشود:

$$MF+MF'=2a$$

یعنی نقطهٔ M روی بیضی مفروض واقع است.

دایره‌ای که مرکزش یکی از دو کانون بیضی مثلاً F وشعاعش 2a باشد دایرهٔ هادی بیضی نظیر کانون F نامیده میشود. هر بیضی دو دایرهٔ هادی دارد.

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر که خاصیت مهم بیضی‌را بیان میکند نتیجه میشود:

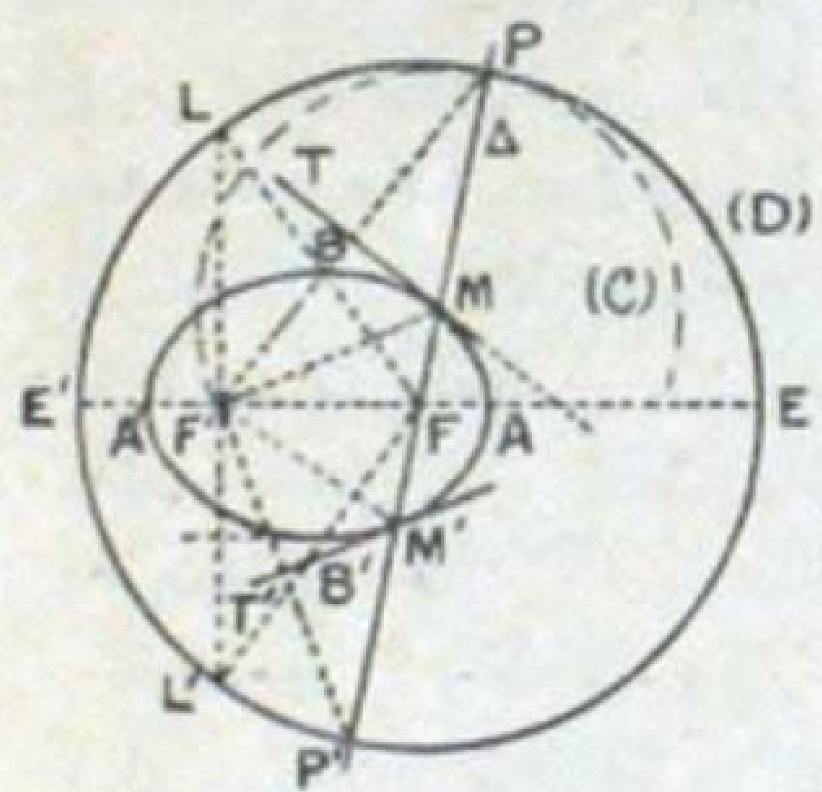
قضیه - هر بیضی مکان هندسی مراکز دایره‌هاییست که از

یکی از دو کانون آن بگذرند و با دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر بیضی مماس باشند.

تبصره - اگر یک دایره مانند (D) و نقطه‌ای مانند F درداخل آن در نظر بگیریم نظر باستدلال فوق:

مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که با دایرهٔ معلوم (D) مماس باشند واز نقطهٔ F که در داخل دایرهٔ (D) واقع است بگذرند یک بیضی است نقطهٔ F یکی از کانونهای این بیضی ودایرهٔ (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر آن میباشد.

۸۲۴ - ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی - یک نقطه مانند P روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F اختیار میکنیم (ش ٦٣٨) میتوان نقطهٔ P را نقطهٔ تماس دایرهٔ (D) با دایره‌ای مانند (C) دانست که از کانون F' بگذرد وبادایرهٔ (D) مماس‌شود. مرکز دایرهٔ (C) روی بیضی واقع است. این مرکز عبارتست از نقطهٔ M فصل مشترک FP با عمودمنصف قطعه‌خط F'P. وقتی نقطهٔ P دایرهٔ (D) را بپیماید نقطهٔ M روی بیضی حرکت میکند و با تغییر دادن نقطهٔ P روی دایرهٔ D میتوان نقاط مختلف بیضی را بدست آورد. نقطهٔ P از دایرهٔ هادی و نقطهٔ M از بیضی را نظیر یکدیگر مینامیم.



(ش ٦٣٨)

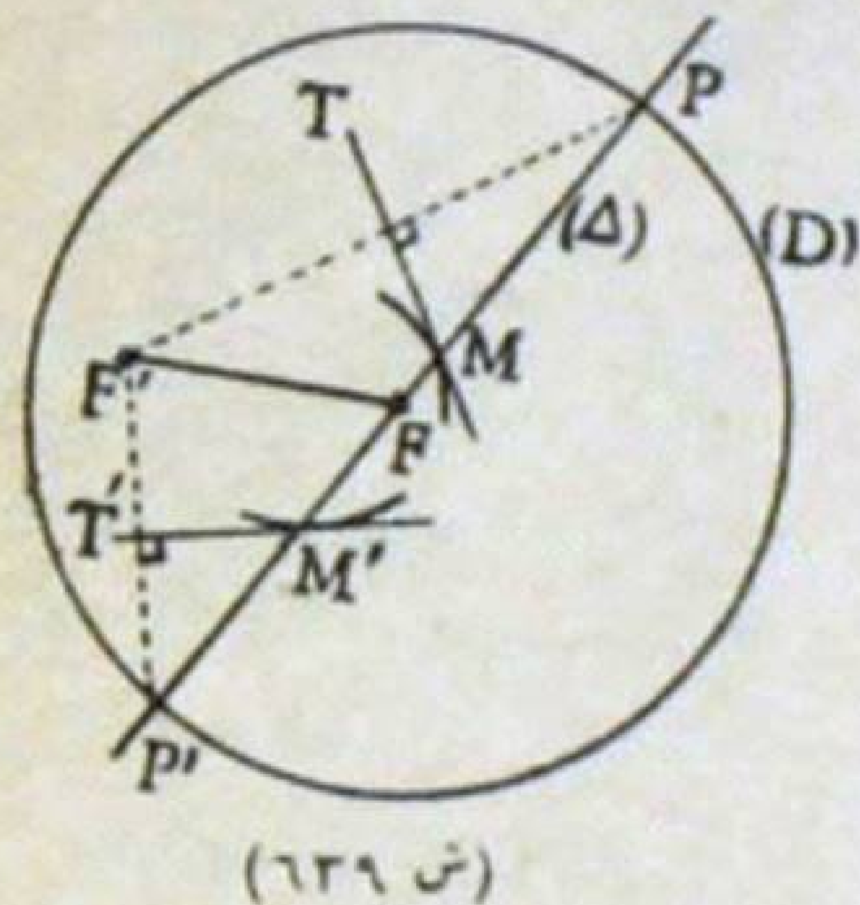
تبصره - نظیر نقاط E و E' از دایرهٔ (D) که روی خط راست FF' واقع هستند نقاط A و A' از بیضی که در وسط قطعه‌های F'E و F'E' قرار دارند حاصل میشود. این دونقطه دو انتهای قطر اطول بیضی میباشند.

نظیر نقاط L و L' از دایرهٔ (D) که روی عمود مرسوم از F' برخط F'F واقع هستند نقاط B و B' از بیضی که در وسط قطعه‌خطهای FL و FL' واقع هستند حاصل میشود. دونقطهٔ B و B' روی عمود منصف قطعه‌خط FF' واقعند و دو انتهای قطر اقصر بیضی میباشند.

وقتی نقطهٔ P قوس $\overset{\frown}{EPL}$ از دایرهٔ (D) را بپیماید نقطهٔ M روی ربع بیضی $\overset{\frown}{AMB}$ حرکت میکند. اگر نقطهٔ P کمانهای $\overset{\frown}{LE'}$ و $\overset{\frown}{E'L'}$ و $\overset{\frown}{L'E}$ از دایرهٔ (D) را بپیماید نقطهٔ M بترتیب کمانهای $\overset{\frown}{BA'}$ و $\overset{\frown}{A'B'}$ و $\overset{\frown}{B'A}$ از بیضی را خواهدپیمود.

۸۲۵ ـ فصل‌مشترك بیضی بایك‌خط راست ـ میخواهیم فصل مشترك خط راست Δ را با بیضی که دو کانونش F و F' و شعاع دایرهٔ هادیش $2a$ میباشد بدست آوریم. برحسب آنکه‌خط Δ ازیکی‌از دو کانون بیضی بگذرد ویا از هیچیك از دو کانون آن نگذرد دوحالت تمیز میدهیم:

حالت اول ـ خط Δ از یکی‌از کانونهای بیضی میگذرد. فرض‌میکنیم خط‌راست Δ از کانون F بگذرد (ش٦٣٩) وفصل‌مشتر کهای خط Δ را بادایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F نقاط P و P' مینامیم. فصل‌مشتر کهای خطΔ بابیضی نقاطی از خط Δ هستند که بتوان هریك‌از آنها را مرکز دایره‌ای اختیار کرد که از کانون F' بگذرد و با دایرهٔ هادی (D) مماس باشد. نقاط تماس این‌دایره‌ها بادایرهٔ (D) ناچار نقاط P و P' هستند و نقاط تقاطع بیضی باخط Δ عبارتند ازنقاط M و M' فصل‌مشتر کهای Δ با عمود منصف‌های دوقطعه‌خط $F'P$ و $F'P'$. از آنچه گذشت نتیجه میشود که:



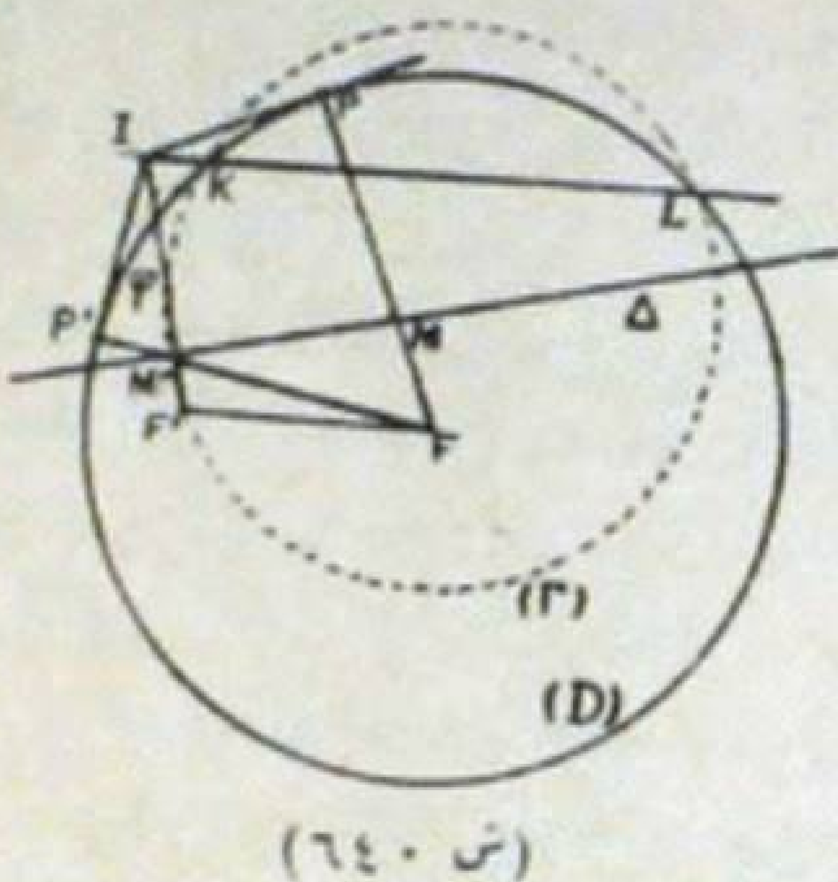
(ش ٦٣٩)

هرخط راست که ازیکی‌از کانونهای بیضی‌بگذرد بیضی‌را در دونقطه قطع میکند.

حالت‌دوم ـ خط Δ ازهیچیك ازدو کانون بیضی نمیگذرد. قرینهٔ‌کانون F' را نسبت بخط Δ نقطهٔ φ مینامیم. هردایره که ازنقطهٔ F' بگذرد ومرکزش روی خط Δ واقع باشد از نقطهٔ φ نیز خواهد گذشت و برعکس هر دایره که از نقاط F' و φ بگذرد مرکزش روی Δ واقع خواهد بود. پس برای تعیین فصل مشتر کهای خط Δ بابیضی باید مراکز

دایره‌هایی‌را که از نقاط F' و φ میگذرند وبادایرهٔهادی (D) نظیر کانون F مماس هستند تعیین کنیم. مراکز این‌دایره‌هانقاط تقاطع خط Δ بابیضی هستند. این مسئله را در شمارهٔ ٤٧١ (متمم مقاله‌های سوم و چهارم) حل کرده‌ایم. در اینجا راه حل آنرا ذکر میکنیم☆:

دایره‌ای‌مانند (Γ) رسم میکنیم که مرکزش روی‌خط Δ واقع‌باشد و از نقطهٔ F' بگذرد و دایرهٔ (D) نظیرکانون F را در دونقطه مانند K و L قطع کند (این‌دایره از نقطهٔφ نیزخواهد گذشت) (ش٦٤٠) خطوط راست KL و $F'\varphi$ یکدیگر را در نقطه‌ای‌مانند I قطع‌میکنند. ازنقطهٔ I مماسهای IP و IP' را بر دایرهٔ هادی (D) رسم میکنیم. نقاط P و P' نقاط تماس دایره‌های مذکور بادایرهٔ هادی (D) هستند ومراکز این دایره‌ها از طرفی روی خط Δ و از طرف دیگر روی FP و FP' واقعند. پس اگر فصل مشترك FP رابا Δ نقطهٔ M و فصل مشترك FP' را با Δ نقطهٔ M' بنامیم نقاط M و M' نقاط‌تقاطع‌خط Δ بابیضی‌هستند.



(ش ٦٤٠)

بحث ـ اگر نقطهٔ I در خارج دایرهٔ هادی (D) واقع باشد خط Δ بیضی را در دونقطه قطع میکند. برای‌آنکه‌نقطهٔ I در خارج دایرهٔ (D) واقع باشد لازم و کافیست که نقطهٔ تقاطع خطوط راست $F'\varphi$ و KL در خارج قطعه‌خط KL واقع باشد وبرای این لازم و کافیست که نقاط F' و φ هردو روی یکی‌از دو کمان KL متعلق بدایرهٔ (Γ) واقع باشند و چون

☆ دلیل صحت این راه حل باختصار از اینقرار است: کافیست نقطهٔ‌تماس هریك‌ازدایره‌های مزبور را بادایرهٔ هادی (D) بدست آوریم. اگریکی‌ازاین نقاط‌تماس‌مجهول‌را P بنامیم خط $F'\varphi$ ومماسی که‌درنقطهٔ P بر دایرهٔ (D) رسم شود یکدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع میکنند و داریم $\overline{IP} = \overline{IF'} \times \overline{I\varphi}$ نقطهٔ I نسبت بدایرهٔ (D) و هردایرهٔ دیگری‌که از نقاط F' و φ بگذرد دارای یك قوت مشترك است. پس اگر دایره‌ای مانند (Γ) رسم‌کنیم که از F' و φ بگذرد ودایرهٔ (D) را در دونقطه مانند K و L قطع‌کند خط‌راست KL که محور اصلی دو دایرهٔ (D) و (Γ) است‌ازنقطهٔ I میگذرد. باین‌ترتیب نقطهٔ I ازتقاطع خطوط $F'\varphi$ و KL بدست‌میآیدو برای‌تعیین‌نقطهٔ P کافیست‌مماس IP را بردایره (D) رسم‌کنیم.

یکی از این دو کمان در داخل دایرهٔ (D) واقع است و نقطهٔ 'F نیز درداخل دایرهٔ (D) قراردارد پس لازم و کافیست که نقطهٔ φ نیز درداخل دایرهٔ (D) واقع باشد.

اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد نقطهٔ I بر نقطهٔ φ منطبق است و فقط یك دایره میتوان رسم کرد که از 'F و φ بگذرد و با دایرهٔ (D) مماس باشد. در اینحالت خط Δ با بیضی فقط در یك نقطهٔ مشترك است☆. در شمارهٔ ۸۲۶ ثابت میکنیم که در اینصورت خط Δ با بیضی مماس میباشد.

حالت خاص - اگر Δ برمحور کانونی بیضی عمود باشد برای آنکه نقطهٔ φ در داخل دایرهٔ هادی (D) واقع باشد یعنی برای آنکه Δ بیضی را قطع کند لازم و کافیست که فصل مشترك خط Δ بامحور کانونی مابین رأسهای A و 'A واقع باشد.

از آنچه گذشت نتیجهٔ زیر بدست میآید.

اولا - اگر نقطهٔ φ یعنی قرینهٔ کانون 'F نسبت بخط Δ در داخل دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F واقع باشد خط Δ بیضی را در دو نقطه قطع میکند.

ثانیاً - اگر نقطهٔ φ در خارج دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ بیضی را قطع نمیکند.

ثالثاً - اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ فقط در یك نقطه با بیضی مشترك است.

۸۳۶ - خط مماس بر بیضی در یکی از نقاط آن

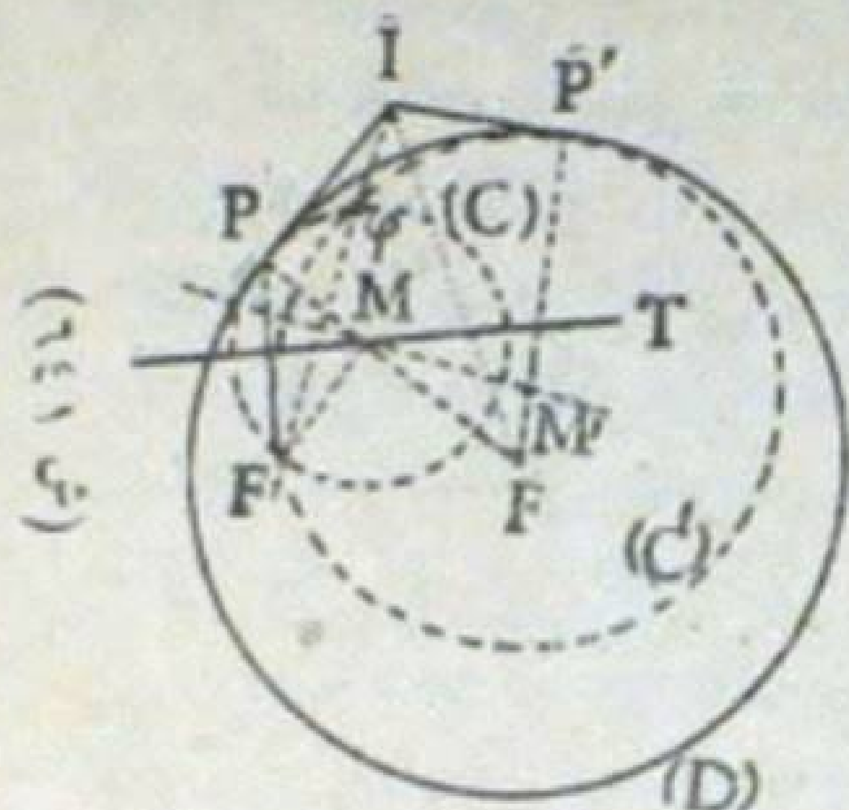
برای تحقیق آنکه در یك نقطه مانند M از بیضی خط مماس بر بیضی وجود دارد یا نه باید دو نقطهٔ مجاور M و 'M را روی بیضی در نظر بگیریم و تحقیق کنیم که اگر نقطهٔ 'M رفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك وبالاخره بر آن منطبق شود خط قاطع 'MM بسمت وضع حدی میل میکند یا نه (شمارهٔ ۱۴۴ مقالهٔ دوم)

فرض میکنیم F و 'F کانونهای یك بیضی و (D) دایرهٔ هادی آن بیضی نظیر کانون F باشد و دو نقطهٔ مجاور M و 'M را روی این بیضی

☆ در این مورد گاهی نیز میگویند که خط △ با بیضی در دو نقطه که برهم منطبق هستند مشترك است.

در نظر میگیریم (ش ٦٤١)

میدانیم که دایره‌های (C) و ('C) که از نقطهٔ 'F میگذرند و مراکز آنها نقاط M و 'M میباشند بادایرهٔ (D) در نقاطی مانند P و 'P مماس هستند. این دو دایره یکدیگر را در نقطهٔ دیگری مانند φ که قرینهٔ نقطهٔ 'F نسبت بخط 'MM است قطع میکنند. مرکز اصلی سه دایرهٔ (D) و (C) و ('C) عبارتست از نقطهٔ I فصل مشترك خط $F'\varphi$ با مماسهایی که در نقاط P و 'P بردایرهٔ (D) رسم شوند.



(ش ٦٤١)

هرگاه نقطهٔ M ثابت بماند و نقطهٔ 'M روی بیضی حرکت کند ورفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك وبالاخره برآن منطبق شود نقطهٔ 'P روی دایرهٔ (D) حرکت خواهد کرد ورفته‌رفته بنقطهٔ P نزدیك و بالاخره برآن منطبق خواهد شد وخط FI که نیمساز زاویهٔ 'PFP است برخط FP منطبق خواهد گشت. دراینصورت نقطهٔ I بر نقطهٔ P و خط $F'\varphi$ بر خط F'P منطبق خواهد شد و خط M'M که همواره عمودمنصف قطعه خط $F'\varphi$ میباشد بسمت عمودمنصف قطعه‌خط F'P که آنرا T مینامیم میل خواهد کرد. نظر بتعریف مماس بریك منحنی در یکی از نقاط آن (شمارهٔ ۱۴۴ مقالهٔ دوم) خط T درنقطهٔ M بر بیضی مماس است.

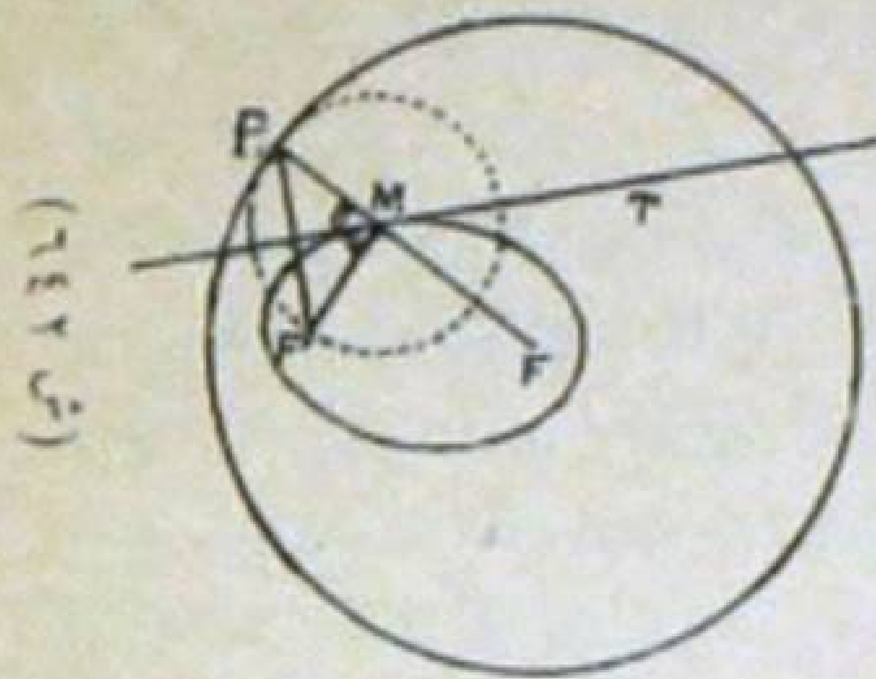
این نکتهٔ شایستهٔ دقت است که خط مماس MT خط نیمساز زاویه‌ایست که از یکی از دو شعاع حامل نقطهٔ M یعنی 'MF و امتداد شعاع حامل دیگر آن یعنی MF پدید میآید (ش ٦٤١ و ٦٤٢)

از آنچه گذشت نتیجه میشود که:

قضیه - درهر نقطه مانند M از بیضی یك خط مماس بر بیضی وجود دارد واین خط مماس خط نیمساز زاویه‌ایست که از یکی از دو شعاع حامل نقطهٔ M و امتداد شعاع حامل دیگر آن پدید میآید.

اگر نقطهٔ M بر یکی از رأسهای بیضی منطبق باشد مماس در آن نقطه بر بیضی برمحوری که از آن رأس میگذرد عموداست. از تقاطع چهار مماس که در چهار رأس بیضی بر آن رسم شود مستطیلی پدید میآید که ابعادش ۲a و ۲b میباشند و بیضی دراین مستطیل محاط است (شکل را رسم کنید)

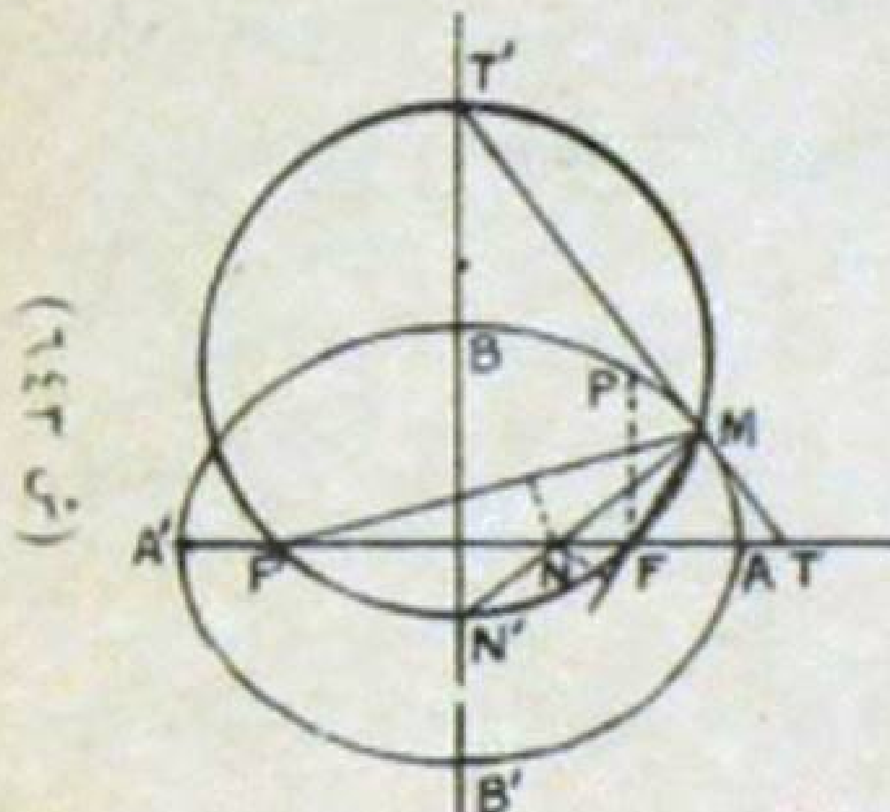
۸۲۷ - تبصره - طریقهٔ ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی که‌در شمارهٔ ۸۲۴ شرح دادیم دارای این خاصیت جالب توجه است که: عمود منصف قطعه‌خط $F'P$ که از تقاطع آن با شعاع FP متعلق بدایرهٔ هادی (D) نقطهٔ M از بیضی بدست میآید خودش خط مماس بربیضی در نقطهٔ M میباشد (ش ۶۴۲)



(ش ۶۴۲)

۸۲۸ - قائم بر بیضی - خط قائم بربیضی* در یکی‌از نقاط‌آن مانند M عبارتست ازخط راستی که درنقطهٔ M برمماس MT عمود شود (ش ۶۴۳)

واضح است که خط قائم بربیضی درنقطهٔ M نیمساز زاویهٔ دو شعاع حامل یعنی نیمساز زاویهٔ $F'MF$ میباشد.



(ش ۶۴۳)

تمرین ۱ - تحقیق‌کنید که اگر فصل‌مشترکهای محور کانونی را بامماس وقائم بربیضی در نقطهٔ M بترتیب‌نقاط T و N بنامیم تقسیم $(TNFF')$ توافقی است. (ش ۶۴۳)

تمرین ۲ - نقطهٔ M را روی بیضی درنظر میگیریم و دایرهٔ محیطی مثلث MFF' را رسم میکنیم و فصل مشترکهای این دایره‌راباخط‌راست BB' نقاط T' و N' مینامیم (ش ۶۴۳) تحقیق کنید که یکی‌از این دونقطه روی خط مماس و دیگری روی خط قائم بر بیضی در نقطهٔ M واقعند.

خاصیت‌های خط مماس بربیضی

۸۲۹ - درشکل ۶۴۲ دیده میشود که نقطهٔ P از دایرهٔ هادی نظیر کانون F عبارتست از قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس MT

برعکس قرینهٔ کانون F' نسبت بیک‌خط راست مانند T را نقطهٔ P مینامیم. اگر P روی دایرهٔ‌هادی نظیر کانون F واقع باشد (ش ۶۴۲)

* وبطورکلی بر هرمنحنی مسطح

شعاع FP خط T را در نقطه‌ای مانند M قطع‌میکند. نقطهٔ M روی‌بیضی است (شمارهٔ ۸۲۴) وخط T درنقطهٔ M بربیضی‌مماس‌است (شمارهٔ ۸۲۶) از مطالب فوق قضیهٔ زیر حاصل میشود:

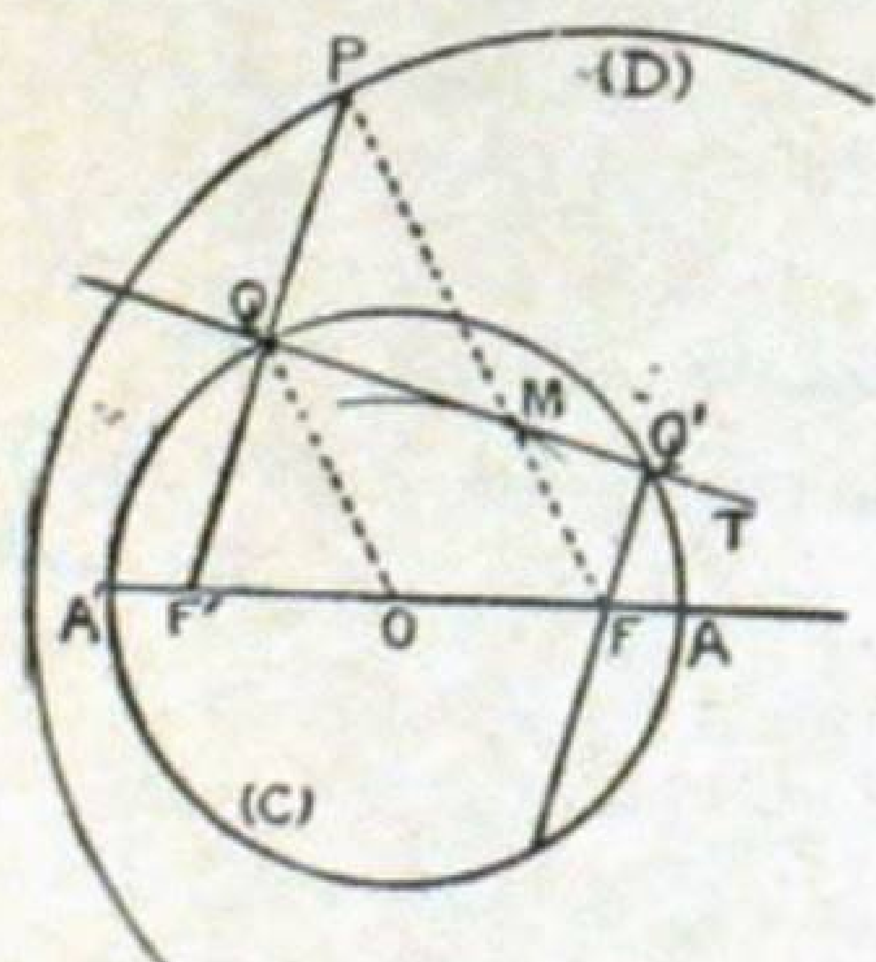
قضیهٔ ۱ - برای‌آنکه یك‌خط راست بایك‌بیضی مماس‌باشد لازم و کافیست‌که قرینهٔ یکی‌از دو کانون بیضی نسبت بآن خط روی دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر بیضی واقع باشد.

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد:

مکان‌هندسی قرینه‌های هریك‌از دو کانون بیضی نسبت بخطوط مماس برآن عبارتست از دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر.

۸۳۰ - نتیجه - عمود منصف‌های قطعه‌خطهاییکه نقاط‌مختلف یك دایره‌را بیك‌نقطهٔ‌ثابت واقع درداخل آن‌دایره وصل‌میکنند همگی بربیضی مماسند. دایرهٔ مزبور دایرهٔ‌هادی‌نظیریکی‌ازدو کانون‌این بیضی‌ونقطهٔ‌ثابت مذکور کانون دیگر این بیضی میباشد.

۸۳۱ - دایرهٔ اصلی بیضی - تصویرکانون F' روی مماس MT عبارتست از نقطهٔ Q وسط قطعه‌خط $F'P$ و اگر وسط قطعه‌خط FF' یعنی مرکز بیضی‌را نقطهٔ O بنامیم (ش ۶۴۴) وOرا به Q وصل کنیم قطعه خط OQ که‌اوساط دوضلع ازمثلث $F'PF$ را بهم وصل میکند مساوی با نصف ضلع FP میباشد و چون $FP=2a$ پس $OQ=a$ و نظر باینکه‌نقطهٔ O ثابت‌است وقتی‌نقطهٔ M روی بیضی ونقطهٔ P روی‌دایرهٔ هادی(D) نظیر کانون F حرکت‌کند نقطهٔQروی دایرهٔ (C) که‌مرکزش O و شعاعش a است تغییر مکان میدهد. دایرهٔ (C) را **دایرهٔ اصلی بیضی** مینامند. محور اطول بیضی یعنی $A'A$ یکی از قطرهای این دایره است.



(ش ۶۴۴)

برعکس اگر نقطهٔ Q یکی‌از نقاط دایرهٔ اصلی‌بیضی باشد وازنقطهٔ Q عمود QT را بر خط $F'Q$ اخراج‌کنیم و قرینهٔ نقطهٔ F' را نسبت بخط

QT نقطهٔ P بنامیم و واضح است که FP = ۲a یعنی نقطهٔ P روی دایرهٔ هادی نظیر کانون F واقع میباشد پس خط QT بر بیضی مماس است.

واضح است که عین استدلال فوق را میتوان در بارهٔ تصویر کانون F بر مماس MT تکرار کرد. دراین مورد باید بجای دایرهٔ هادی نظیر کانون F دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را در نظر بگیریم.

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر حاصل میشود :

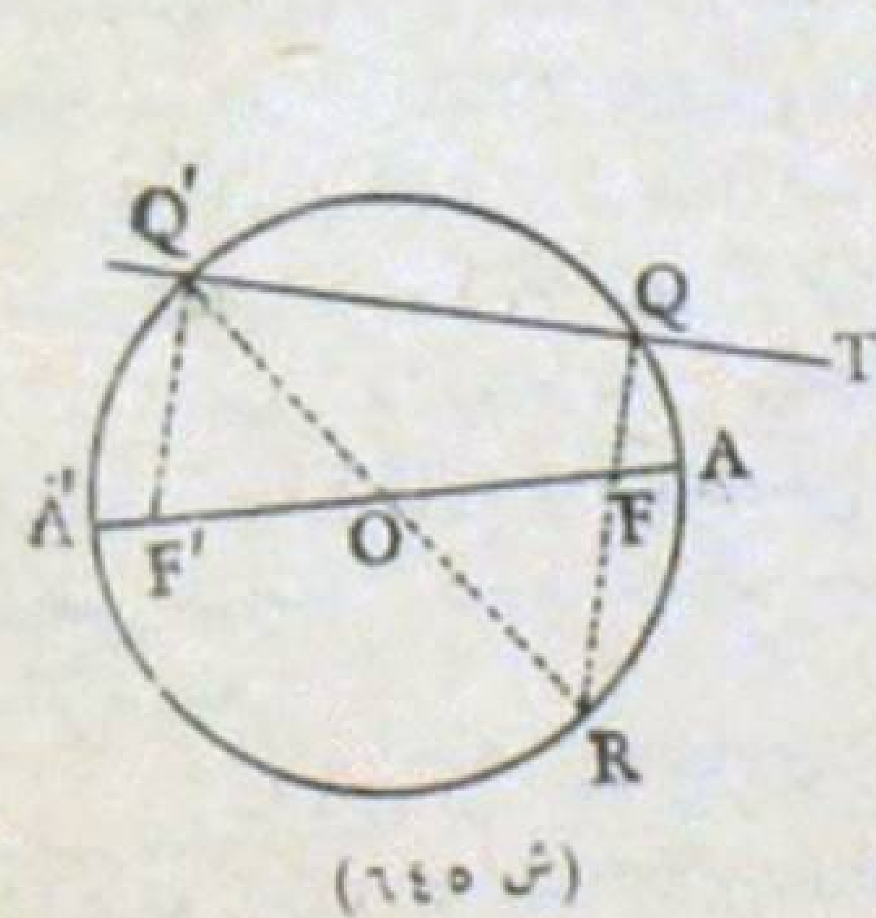
قضیهٔ ۳ - برای آنکه یک خط راست با یک بیضی مماس باشد لازم و کافیست که تصویر یکی از دو کانون بیضی بر آن خط متعلق بدایرهٔ اصلی بیضی باشد.

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد :

مکان هندسی تصاویر هریک از دو کانون بیضی برخطوط مماس بر آن عبارتست از دایرهٔ اصلی بیضی.

۸۴۲ - نتیجه - اگر زاویهٔ قائمه‌ای در صفحهٔ خود چنان تغییر مکان دهد که رأسش همواره روی دایرهٔ ثابتی حرکت کند و یک ضلعش همواره از نقطهٔ ثابتی واقع در داخل دایرهٔ مزبور بگذرد ضلع دیگرش بر یک بیضی که نقطهٔ ثابت مزبور یک کانون آن و دایرهٔ مزبور دایرهٔ اصلی آنست همواره مماس میباشد.

۸۴۳ - قضیهٔ ۴ - حاصلضرب فواصل دو کانون هر بیضی از یکی از خطوط مماس بر آن مساویست با مربع نصف طول محور اقصر بیضی.



(ش ۶۴۵)

اگر خط T بر بیضی مماس باشد وتصاویر دو کانون F و F' را روی خط T بترتیب نقاط Q و Q' بنامیم (ش ۶۴۵) نقاط Q و Q' روی دایرهٔ اصلی بیضی واقع هستند (شمارهٔ ۸۳۱) و اگر دومین فصل مشترک خط FQ را با دایرهٔ اصلی نقطهٔ R بنامیم چون زاویهٔ Q'QR قائمه است قطعه‌خط Q'R یکی از قطرهای

دایرهٔ اصلی میباشد و از تساوی دو مثلث OFR و OF'Q' نتیجه میشود F'Q' = FR و مطابق شکل نظر بقضیهٔ شمارهٔ ۳۱۶ (مقالهٔ سوم) داریم:

$$FQ\times FR = FA\times FA' = (a-c)(a+c) = a^2-c^2 = b^2$$

بنابراین

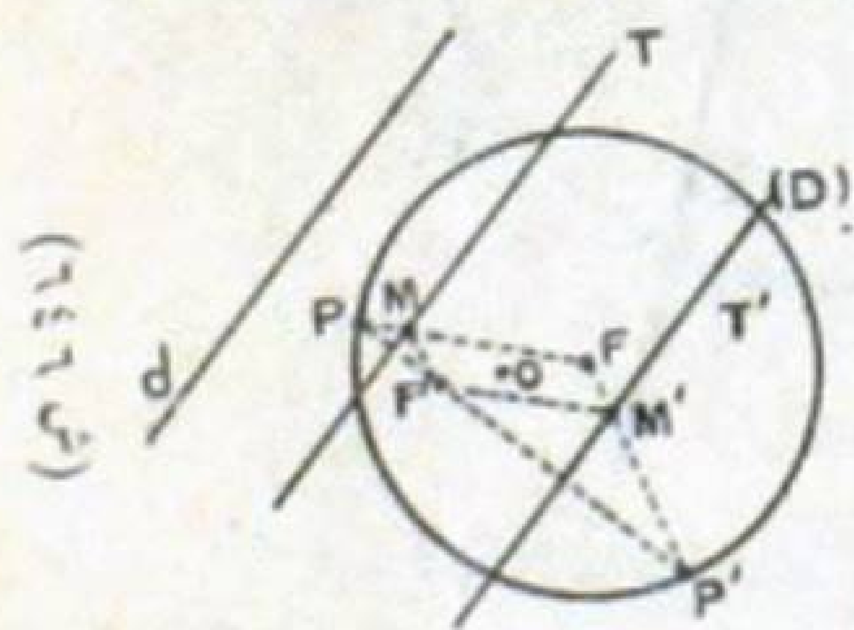
$$\boxed{FQ\times F'Q' = b^2}$$

تمرین - ثابت کنید که هرگاه در یک صفحه خط راستی چنان تغییر مکان دهد که همواره حاصلضرب فواصل دو نقطهٔ ثابت که در یک طرف خط مزبور واقعند از آن خط مساوی با مقدار ثابتی باشد این خط راست همواره مماس است بر یک بیضی که دو نقطهٔ مزبور دو کانون آن و مقدار ثابت مزبور مربع نصف طول محور اقصر آنست.

مسائل مربوط بخط مماس بر بیضی

۸۴۴ - مسئلهٔ ۱ - خط راست d در صفحهٔ یک بیضی مفروض است. میخواهیم خط مماسی بموازات خط d بر بیضی رسم کنیم.

فرض میکنیم F و F' دو کانون بیضی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ۶۴۶) قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ ۸۲۹) واز طرف دیگر روی عمود مرسوم از نقطهٔ F' برخط d واقع است. (زیرا مماس مطلوب با خط d موازیست) بنابراین اگر از نقطهٔ F' خطی بر d عمود کنیم و فصل مشترکهای آنرا با دایرهٔ (D) نقاط P و P' بنامیم عمودمنصف‌های دو قطعه‌خط F'P و F'P' یعنی دوخط T و T' مماسهای مطلوب میباشند. نقاط تماس M و M' عبارتند از فصل مشترکهای دو مماس T و T' باشعاعهای FP و FP' ازدایرهٔ هادی. چون نقطهٔ F' در داخل دایرهٔ (D) واقعست خطی که از F' بر d عمود میکنیم دایرهٔ هادی (D) را همواره در دو نقطه قطع میکند و مسئله همیشه دوجواب دارد.



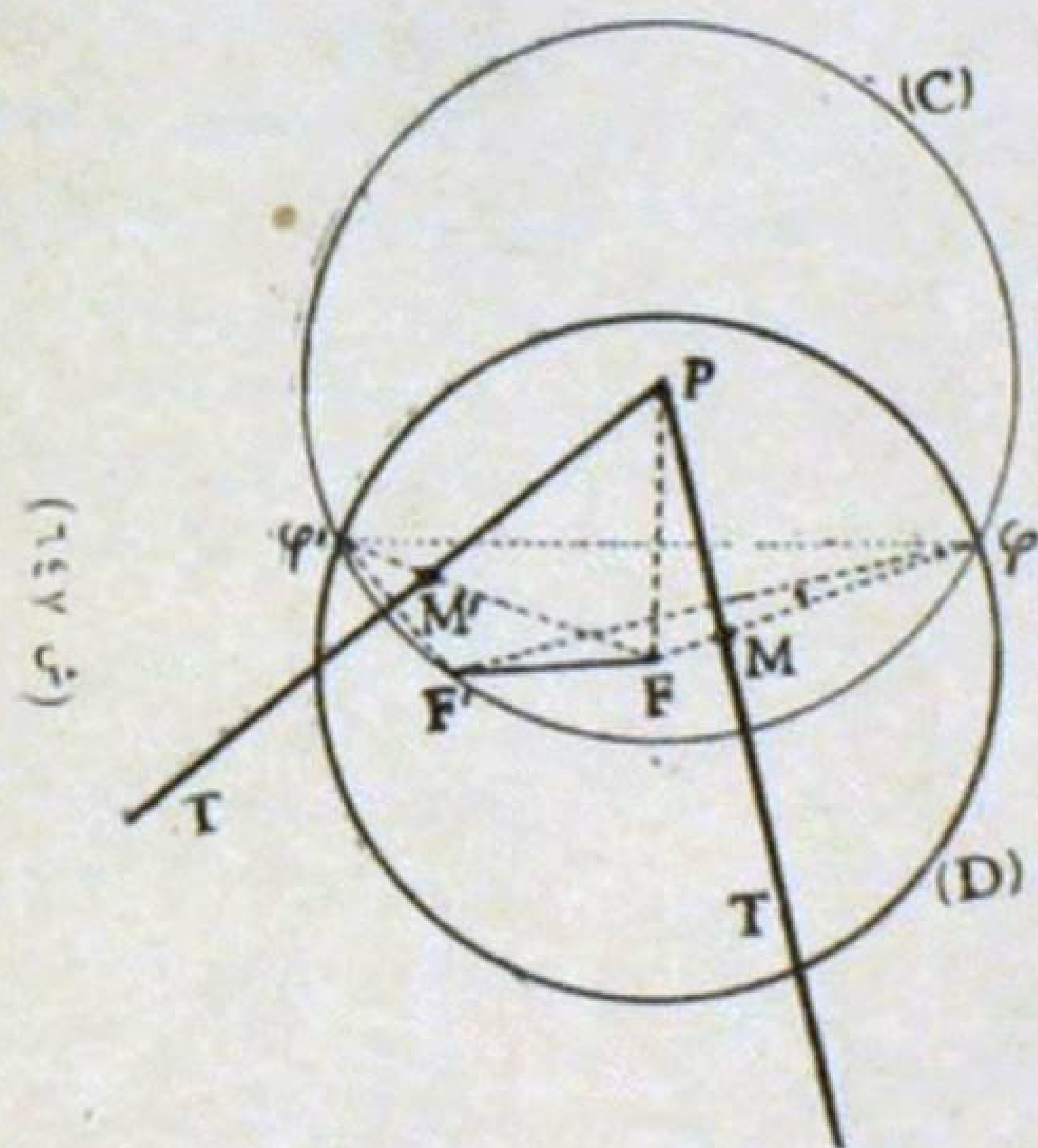
(ش ۶۴۶)

۸۴۵ - تبصره - دو مثلث PMF' و PFP' متساوی‌الساقین هستند (ش ۶۴۶) بنابراین خطوط MF' و FP' باهم موازی میباشند. بهمین دلیل

خطوط $M'F'$ و FP نیز متوازیند. پس چهارضلعی $MF'M'F$ متوازی‌الاضلاع است. بنابراین نقاط M و M' نسبت بنقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند.

٨٣٦ - مسئلهٔ ۲ - میخواهیم از نقطهٔ معلوم P واقع درصفحهٔ یك بیضی مماسی بر آن بیضی رسم کنیم.

فرض میکنیم F و F' دو کانون بیضی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ٦٤٧) قرینهٔ کانون F' نسبت بخط **مماس مطلوب از** طرفی روی دایرهٔهادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ **٨٢٩**) **وازطرف‌دیگر** روی‌دایرهٔ (C) که‌مرکزش P وشعاعش PF' باشد واقع‌است. زیرادو نقطه که نسبت بخط مماس مطلوب قرینهٔ یکدیگر باشند از **هرنقطهٔ واقع** براین خط و ازجمله از نقطهٔ P یك‌فاصله واقعند.



(ش ٦٤٧)

اگردایرهٔ (C) دایرهٔهادی (D) رادرنقاط φ و φ' قطع کند میتوان از نقطهٔ P دومماس بربیضی رسم کرد و در این‌صورت میگویند **نقطهٔ P درخارج بیضی واقع است.** این دومماس عبارتند از عمود منصف‌های قطعه خطهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ و نقاط تماس آنها M و M' بترتیب روی شعاعهای $F\varphi$ و $F\varphi'$ از دایرهٔ هادی واقعند.

اگر دایرهٔ (C) بادایرهٔ هادی (D) مماس باشد نقطهٔ P روی‌بیضی

واقعست (شمارهٔ ٨٢٤) و مسئله یك‌جواب دارد که همان مماسی است که میتوان درنقطهٔ P واقع بربیضی بر آن رسم‌کرد.

اگر دو دایرهٔ (C) و (D) نقطهٔ مشترکی نداشته باشند نمیتوان از نقطهٔ P مماسی بربیضی رسم کرد و در اینصورت میگویند **نقطهٔ P در داخل بیضی واقع است.**

٨٣٧ - شرط آنکه نقطه‌ای مانند P در خارج یك بیضی واقع باشد - برای آنکه نقطهٔ P درخارج بیضی واقع‌باشد یعنی بتوانیم از P دو مماس بربیضی رسم‌کنیم لازم و کافیست که دوایر (C) و (D) متقاطع باشند وبرای‌آنکه‌دوایر (C) و (D) متقاطع‌باشند لازم‌و کافیست که بتوانیم مثلثی بسازیم که اضلاع آن مساوی با قطعه خطهای PF (خط‌المرکز دودایره) و PF' و $۲a$ (شعاعهای دودایره) باشند وبرای‌این لازم و کافیست که طول یکی‌ازاین سه‌قطعه‌خط ازمجموع دوقطعه‌خط‌دیگر کوچکتر و ازتفاضل آنها بزرگتر باشد. بنابراین شرط تقاطع دودایرهٔ مزبور را میتوان چنین نوشت :

$$|PF-PF'|<۲a<PF+PF'$$

اما نامساوی $|PF-PF'|<۲a$ همواره برقراراست زیرا اگرنقطهٔ P روی محور کانونی واقع نباشد و یا متعلق بقطعه‌خط FF' باشد داریم: $|PF-PF'|<۲c$ و اگر P روی محور کانونی و خارج از قطعه‌خط FF' باشد داریم $|PF-PF'|=۲c$ پس‌درهرصورت نامساوی $|PF-PF'|<۲a$ برقرار است (زیرا $۲c<۲a$)

بنابراین شرط لازم و کافی برای‌آنکه بتوانیم ازنقطهٔ P دو مماس بربیضی رسم کنیم اینست که داشته‌باشیم :

$$\boxed{PF+PF'>۲a}$$

٨٣٨ - قضایای پونسله☆ - اگر از نقطهٔ P واقع در خارج یك بیضی دوخط مماس بر آن بیضی رسم کنیم و نقاط تماس آنها را M و M' و کانونهای بیضی را F و F' بنامیم :

اولا - خط راستی که از نقطهٔ P واز یك‌کانون بیضی مثلا از F میگذرد زاویهٔ MFM' را نصف میکند.

☆ Poncelet ریاضی‌دان‌وژنرال فرانسوی(١٧٨٨-١٨٦٧ میلادی)

ثانیاً خطوط مماس☆ نسبت بخط نیمساز زاویهٔ FPF' قرینهٔ یکدیگرند.

اولا شکلی را که در شمارهٔ ۸۳٦ برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش٦٤٨) نقاط φ و φ' یعنی فصل مشترکهای دو دایرهٔ (C) و (D) نسبت بخط PF که خط‌المرکزین دو دایرهٔ مزبور است قرینهٔ یکدیگرند بنابراین داریم :

$$\widehat{\varphi' FP} = \widehat{PF\varphi}$$

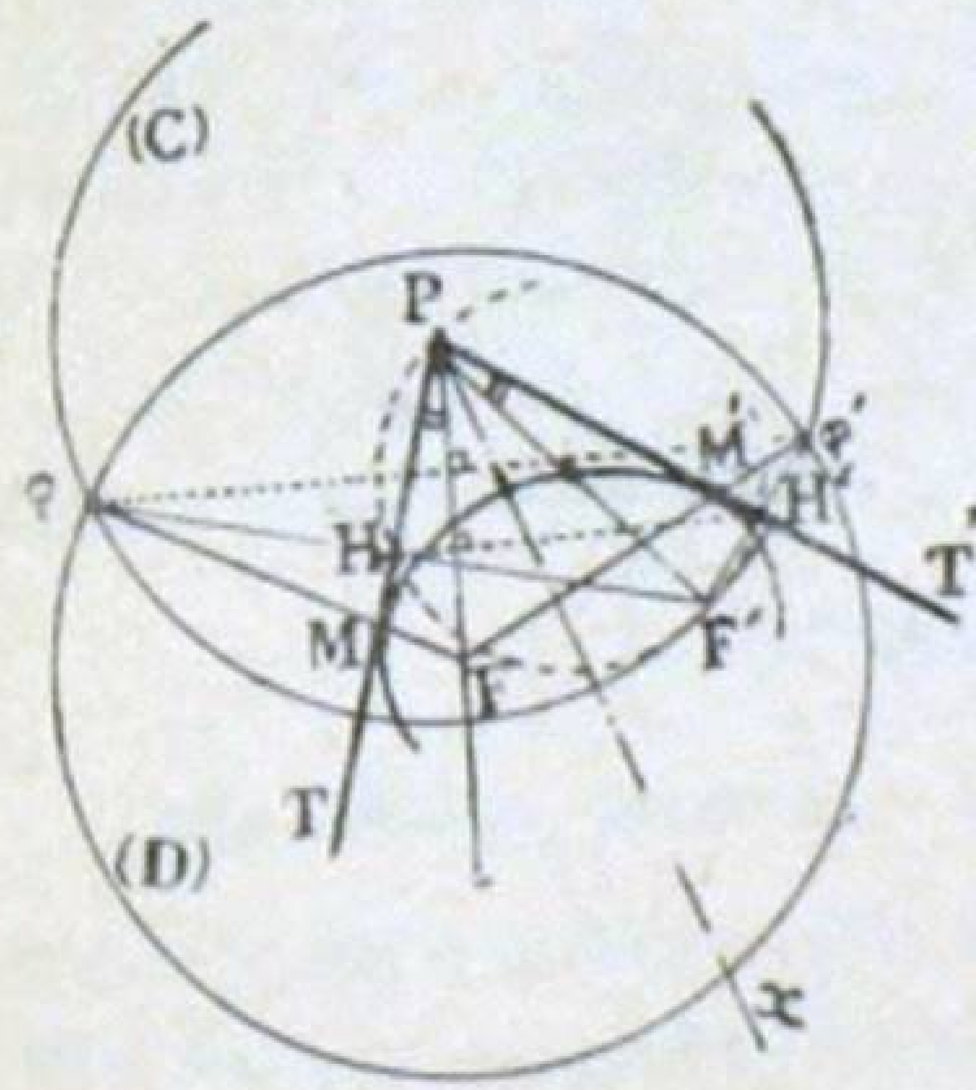
اما نقطهٔ M روی خط $F\varphi$ بین φ و F واقع است و همچنین نقطهٔ M' روی خط $F\varphi'$ بین F و φ' قرار دارد پس :

$$\widehat{M'FP} = \widehat{PFM}$$

یعنی نیم‌خط FP (بمبدأ F) نیمساز زاویهٔ محدب MFM' است.

واضح است که همین خاصیت را میتوان بهمین طریق درمورد کانون F' ثابت کرد و برای این باید بجای دایرهٔ (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را در نظر گرفت .

ثانیاً تصاویر نقطهٔ F' روی دو مماس که آنها را نقاط H و H' مینامیم روی دایرهٔ بقطر PF' واقع هستند (ش ٦٤٨) و چون نقاط H و H' بترتیب در وسط قطعه خط های $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ قرار دارند دو خط HH' و $\varphi\varphi'$ باهم موازیند و چون خط‌المرکزین PF بر وتر مشترک $\varphi\varphi'$ عمود است پس PF بر HH' نیز عمود میباشد.



(ش ٦٤٨)

بنابراین در مثلث PHH' ارتفاع نظیر ضلع HH' روی خط راست PF واقع است و قطر دایرهٔ محیطی این مثلث PF' میباشد

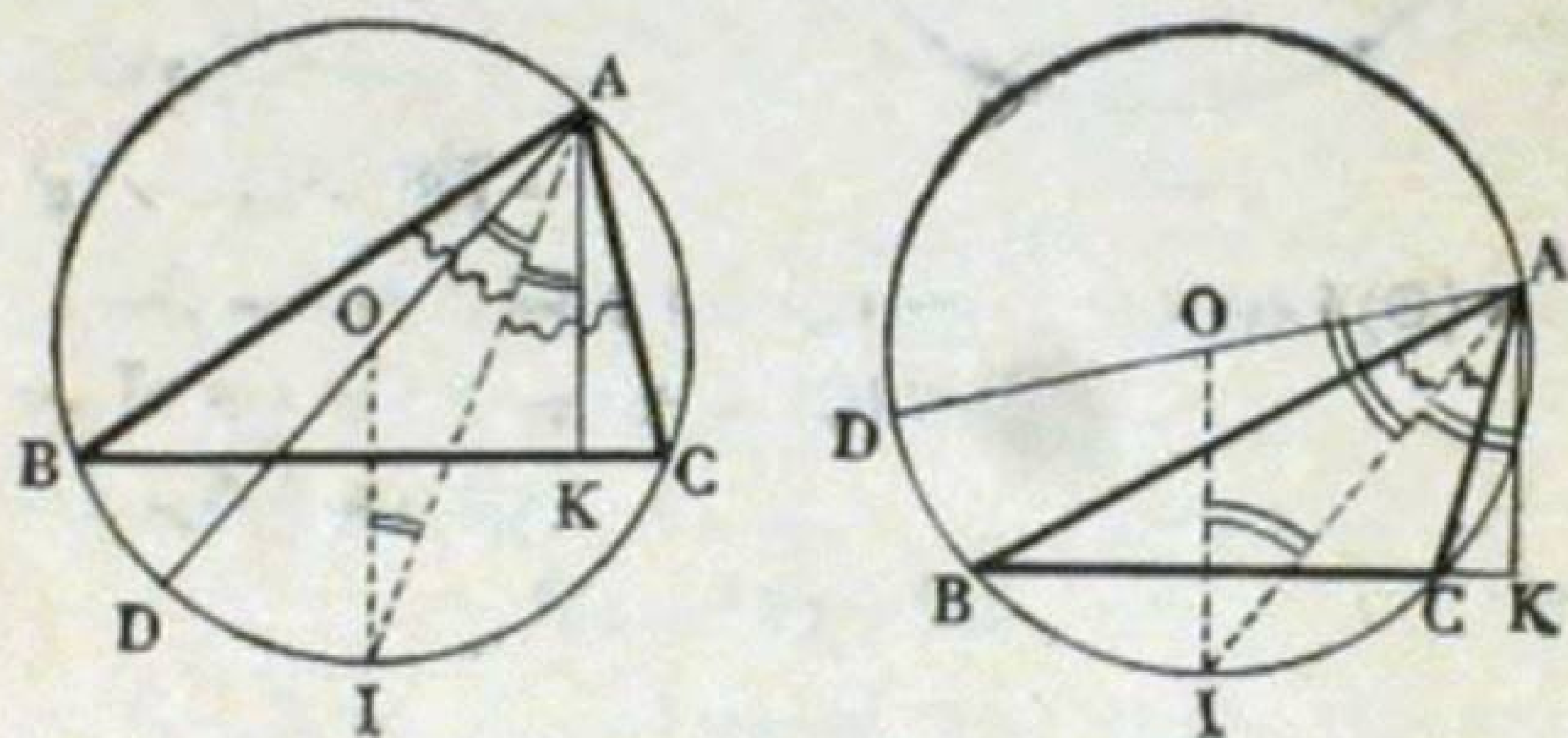
☆ مقصود خطوط راست و نامحدود PM و PM' است.

و میدانیم (به تبصرهٔ همین شماره رجوع کنید) که نیمساز زاویهٔ HPH' بر نیمساز زاویهٔ FPF' منطبق است. پس خطوط مماس PT و PT' نسبت به نیمساز زاویهٔ FPF' که آنرا Px مینامیم قرینهٔ یکدیگرند.

تبصره - در ذیل شمارهٔ ۲۹۹ در مقالهٔ سوم ثابت کردیم که :

اگر در مثلث ABC ارتفاع نظیر ضلع BC را AK وقطری از دایرهٔ محیطی را که از رأس A میگذرد AD بنامیم نیمساز زاویهٔ BAC بر نیمساز زاویهٔ DAK منطبق است.

و در اینجا استدلال این قضیه را یادآوری میکنیم :



(ش ٦٤٩)

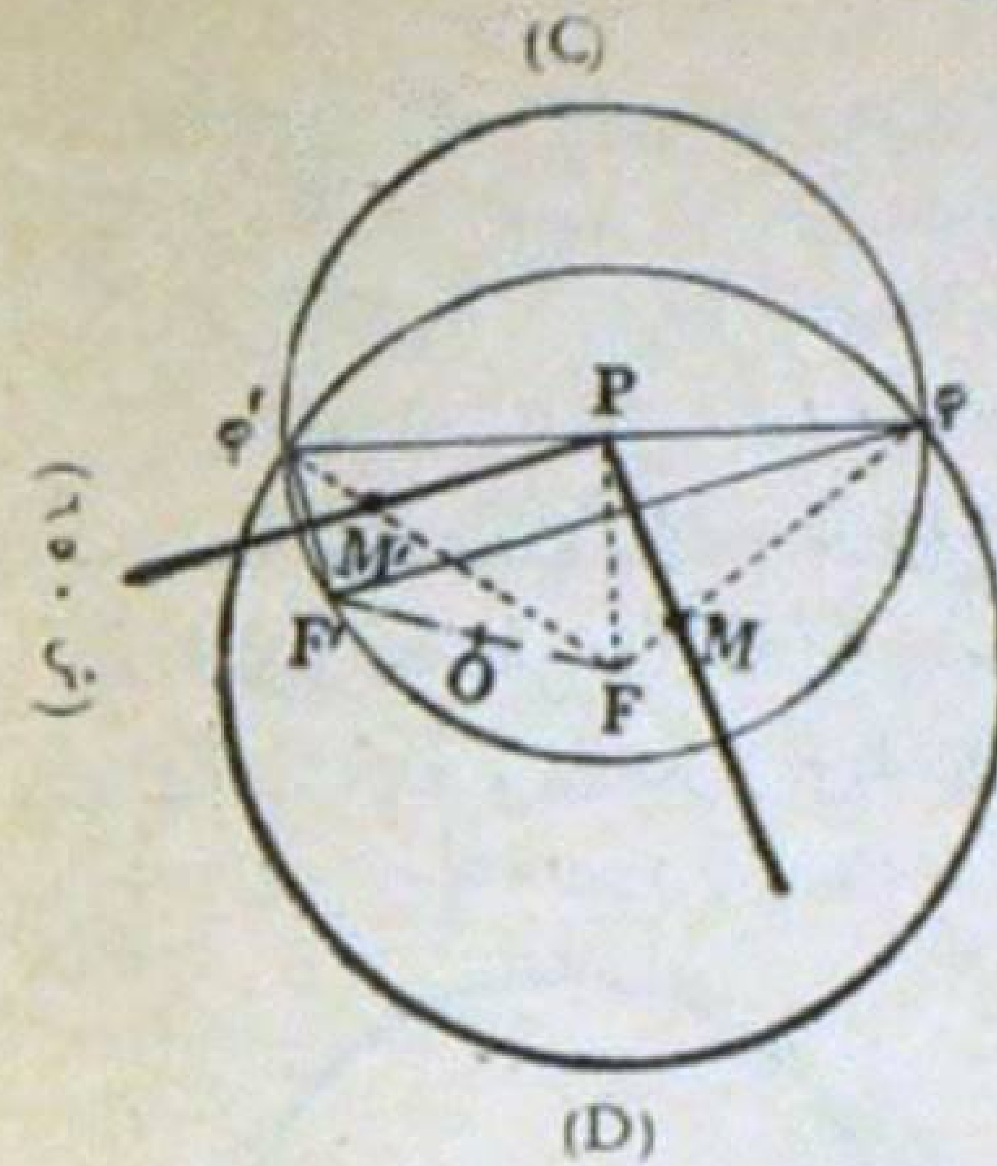
نیمساز زاویهٔ BAC را رسم میکنیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطه‌ای مانند I قطع کند (ش ٦٤٩) باید ثابت کنیم که AI نیمساز زاویهٔ DAK نیز هست . نقطهٔ I را بنقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی وصل میکنیم، OI بر BC عمود است و داریم:

$$\widehat{DAI} = \widehat{OIA}$$ (زیرا مثلث OIA متساوی‌الساقین است)

از طرف دیگر $$\widehat{KAI} = \widehat{OIA}$$ (زوایای متبادل داخلی)

پس $$\widehat{DAI} = \widehat{KAI}$$ یعنی AI نیمساز زاویهٔ DAK است.

۸۳۹ - مکان هندسی نقاطی که میتوان از آنها دو مماس عمود برهم بر یك بیضی رسم کرد - شکلی را که در شمارهٔ ۸۳٦ برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش ٦٥٠) از روی این شکل واضح است که برای آنکه مماسهای PM و PM' برهم عمود باشند لازم و کافیست که خطوط $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ که بترتیب بر مماسهای مزبور عمودند بر یکدیگر نیز عمود باشند و برای این لازم و کافیست که خط راست $\varphi\varphi'$



(ش ۶۵۰)

از مرکز دایرهٔ (C) یعنی از نقطهٔ P بگذرد. چون خط $\varphi\varphi'$ محور اصلی دو دایرهٔ (C) و (D) است برای آنکه خط $\varphi\varphi'$ از نقطهٔ P بگذرد لازم و کافیست که نقطهٔ P نسبت بدو دایرهٔ (C) و (D) دارای یك قوت مشترك باشد یعنی لازم و کافیست که داشته باشیم :

$$-\overline{PF'}^2 = \overline{PF}^2 - 4a^2$$

[مقدار سمت راست تساوی فوق قوت نقطهٔ P نسبت بدایرهٔ (D) و مقدار سمت چپ آن قوت نقطهٔ P نسبت بدایرهٔ (C) است]

از تساوی فوق نتیجه میشود :

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2 \qquad (۱)$$

و اگر مرکز بیضی یعنی وسط قطعه‌خط FF' را O بنامیم (ش ۶۵۰) در مثلث PFF' که PO یکی از میانه‌های آنست نظر بشمارهٔ ۳۱۰ (مقالهٔ سوم) میتوان نوشت :

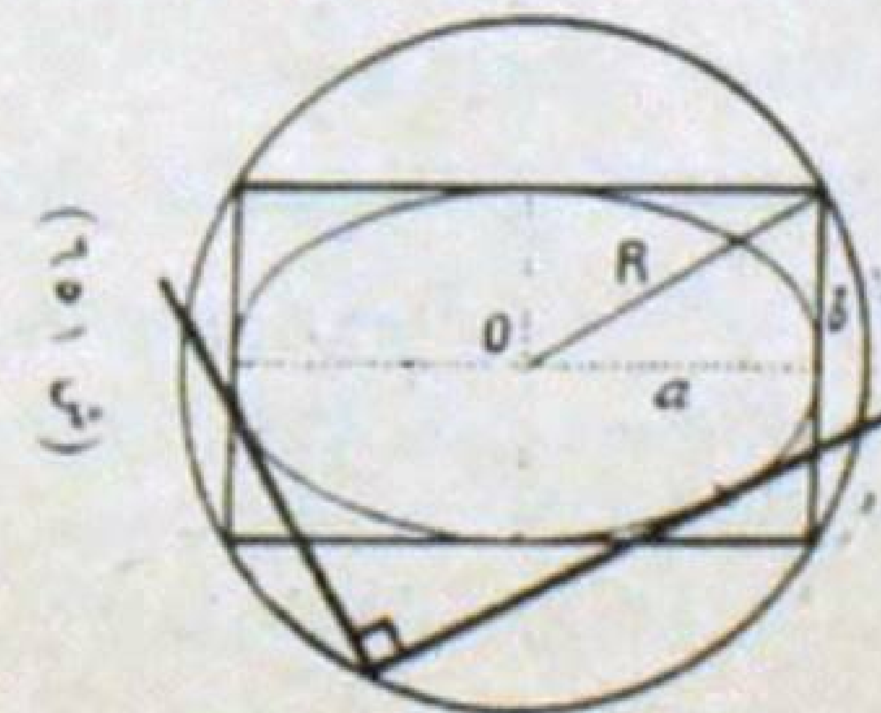
$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 2\overline{OP}^2 + 2c^2 \qquad (FF' = 2c \text{ زیرا})$$

و بادر نظر گرفتن رابطهٔ (۱) نتیجه‌میشود:

$$4a^2 = 2\overline{OP}^2 + 2c^2$$

واز آنجا

$$\overline{OP}^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2$$



(ش ۶۵۱)

یعنی مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ایست که مرکزش نقطهٔ O مرکز بیضی و شعاعش $R=\sqrt{a^2+b^2}$ میباشد این دایره را دایرهٔ مونژ* مینامند.

اگر در چهار رأس بیضی چهار مماس بر آن رسم کنیم از تقاطع این چهار خط مماس یك مستطیل پدید میآید و واضح است که دایرهٔ مونژ از چهار رأس این مستطیل میگذرد (ش ۶۵۱)

معادلهٔ بیضی

۸۴۰ ـ محاسبهٔ شعاع حاملهای یك نقطهٔ متعلق به بیضی برحسب طول آن نقطه ـ کانونهای بیضی (E) را F و F' و طول محور اطول آنرا $2a$ و طول قطعه‌خط FF' را $2c$ مینامیم و خط نامحدود FF' را محور طولها $(x'x)$ و جهت مثبت آنرا از F' بطرف F میگیریم و عمودمنصف قطعه‌خط FF' را محور عرضها $(y'y)$ اختیار میکنیم (ش۶۵۲).

حال نقطهٔ دلخواهی مانند M بمختصات x و y درصفحهٔ xoy درنظر میگیریم وطولهای MF و MF' را برحسب x و y و c حساب میکنیم.

اگر تصویر نقطهٔ M را برمحور $x'x$ نقطهٔ m بنامیم داریم :

$\overline{Om}=x$ و $\overline{mM}=y$ و $\overline{OF}=c$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ MFm میتوان نوشت :

$$\overline{MF}^2 = \overline{Fm}^2 + \overline{mM}^2$$

اما روی محور $x'x$ نظر برابطهٔ شال داریم :

$$Fm = \overline{Om} - \overline{OF} = x - c$$

پس

$$\overline{MF}^2 = (x-c)^2 + y^2 \qquad (۱)$$

اگر نقطهٔ F را به F' تبدیل کنیم c به $-c$ تبدیل میشود زیرا $\overline{OF'} = -c$ پس داریم :

(ش ۶۵۲)

$$\overline{MF'}^2 = (x+c)^2 + y^2 \qquad (۲)$$

چون رابطهٔ (۱) را عضو بعضو از رابطهٔ (۲) کم کنیم حاصل میشود :

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 4cx \qquad (۳)$$

اا اینجا فرض کرده‌ایم که نقطهٔ M نقطهٔ دلخواهی ازصفحهٔ xoy باشد.

* Monge

اگر نقطهٔ M روی بیضی (E) واقع باشد گذشته از روابط فوق رابطهٔ زیر را نیز داریم :

(٤) $$MF + MF' = 2a$$

رابطهٔ (۳) را میتوان چنین نوشت :

$$(MF' + MF)(MF' - MF) = 4cx$$

و نظر برابطهٔ (٤) رابطهٔ فوق باینصورت درمیآید :

(٥) $$MF' - MF = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}$$

واز روابط (٤) و (٥) بآسانی نتیجه میشود :

(٦) $$MF' = a + \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad MF = a - \frac{cx}{a}$$

بنابراین اگر نقطهٔ M روی بیضی (E) واقع باشد طولهای شعاع حاملهای آن از روی روابط (٦) برحسب x (طول نقطهٔ M) ومقادیر معلوم a و c بدست میآید .

۴۸۱ – معادلهٔ بیضی – بدواً خاطر نشان میکنیم که معادلهٔ یك منحنی مانند (C) نسبت بمحورهای مختصات $x'x$ و $y'y$ رابطه‌ایست مابین x و y بطوریکه اولا اگر نقطه‌ای روی منحنی C واقع باشد مختصاتش در این رابطه صدق کنند وثانیاً برعکس هر نقطه که مختصاتش دررابطهٔ مزبور صادق باشند روی منحنی (C) واقع باشد.

اگر نقطهٔ m بمختصات x و y روی بیضی (E) واقع باشد شعاع حاملهای آن در روابط (۱) تا (٦) شمارهٔ ۸٤۰ صادق هستند وچون مقدار MF را از روابط (٦) در رابطهٔ (۱) قرار دهیم حاصل میشود :

$$\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

ویا پس از انجام دادن عملیات لازم☆

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

☆ اگر مقدار MF' را از روابط (٦) در رابطهٔ (۲) قرار دهیم همین نتیجه بدست خواهد آمد.

اما میدانیم که $a^2 - c^2 = b^2$ پس رابطهٔ فوق باینصورت درمیآید :

$$\frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

وچون طرفین را بر b^2 تقسیم کنیم حاصل میشود :

(۷) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

بنابراین هر نقطه که روی بیضی (E) واقع باشد مختصاتش در رابطهٔ (۷) صادق هستند.

اکنون ثابت میکنیم که برعکس اگر مختصات نقطه‌ای در رابطهٔ (۷) صدق کنند آن نقطه روی بیضی (E) واقع است.

فرض میکنیم مختصات x_1 و y_1 متعلق بنقطهٔ M_1 در رابطهٔ (۷) صادق باشند بنابراین داریم :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ویا

(۸) $$y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)$$

از روی این رابطه پیداست که x_1^2 ناچار کوچکتر از a^2 ویامساوی با آن میباشد بنابراین داریم :

$$-a \leq x_1 \leq +a$$

خطراست D که از نقطهٔ M_1 بموازات محور $y'y$ رسم شود معادله‌اش $x = x_1$ است وچون x_1 بین $-a$ و $+a$ محصوراست این خط بیضی (E) را در دو نقطه قطع میکند☆ و برای بدست آوردن عرضهای ایندو نقطه کافیست درمعادلهٔ (۷) بجای x مقدار x_1 را قرار دهیم باین‌طریق حاصل میشود :

(۹) $$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)$$

☆ اگر x_1 مساوی با a (یا مساوی با $-a$) باشد y_1 مساوی با صفر است و نقطهٔ M_1 بررأس A (یا بر رأس A') از بیضی منطبق است

از مقایسهٔ روابط (۸) و (۹) معلوم میشود $y^2=y_1^2$

و از آنجا $y=\pm y_1$

پس نقطهٔ M_1 بر یکی از نقاط تصل مشترك خط D و بیضی (E) منطبق است یعنی M_1 روی بیضی (E) واقع میباشد.

از آنچه گذشت نتیجه میشود که :

معادلهٔ بیضیی که طول محور اطولش ۲a و طول محور اقصرش ۲b باشد عبارتست از :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

۸۴۲ - معادلهٔ دایره - در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMm (ش ۶۵۳) داریم :

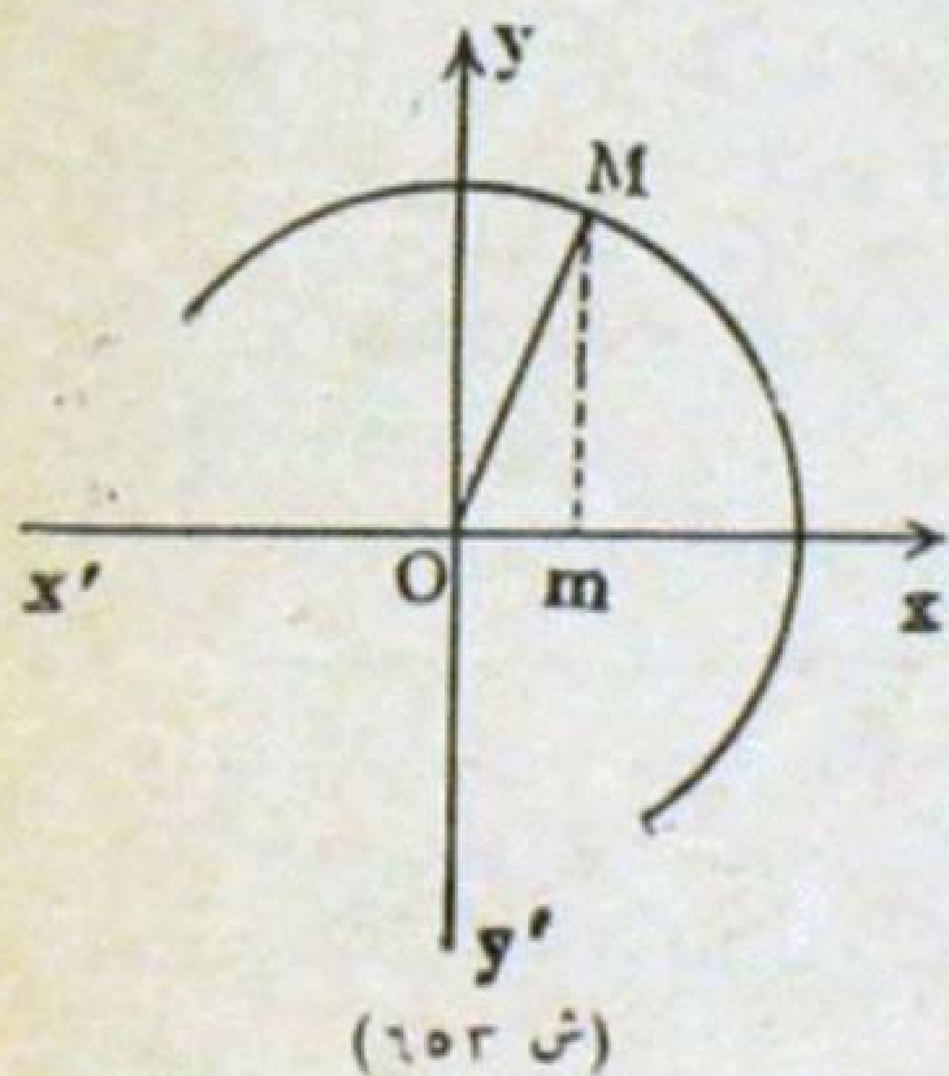
$$\overline{OM}^2=\overline{Om}^2+\overline{mM}^2=x^2+y^2$$

بنابراین اگرفاصلهٔ OM مساوی با R باشد مختصات هریك از نقاط دایرهٔ (O و R) درمعادلهٔ

(۱) $x^2+y^2=R^2$

صادق هستند.

برعکس اگر مختصات نقطهٔ M در معادلهٔ (۱) صادق باشند داریم: $\overline{OM}^2=R^2$ یعنی نقطهٔ M روی دایرهٔ (O و R) واقع است . پس معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایرهٔ (O و R) میباشد.



(ش ۶۵۳)

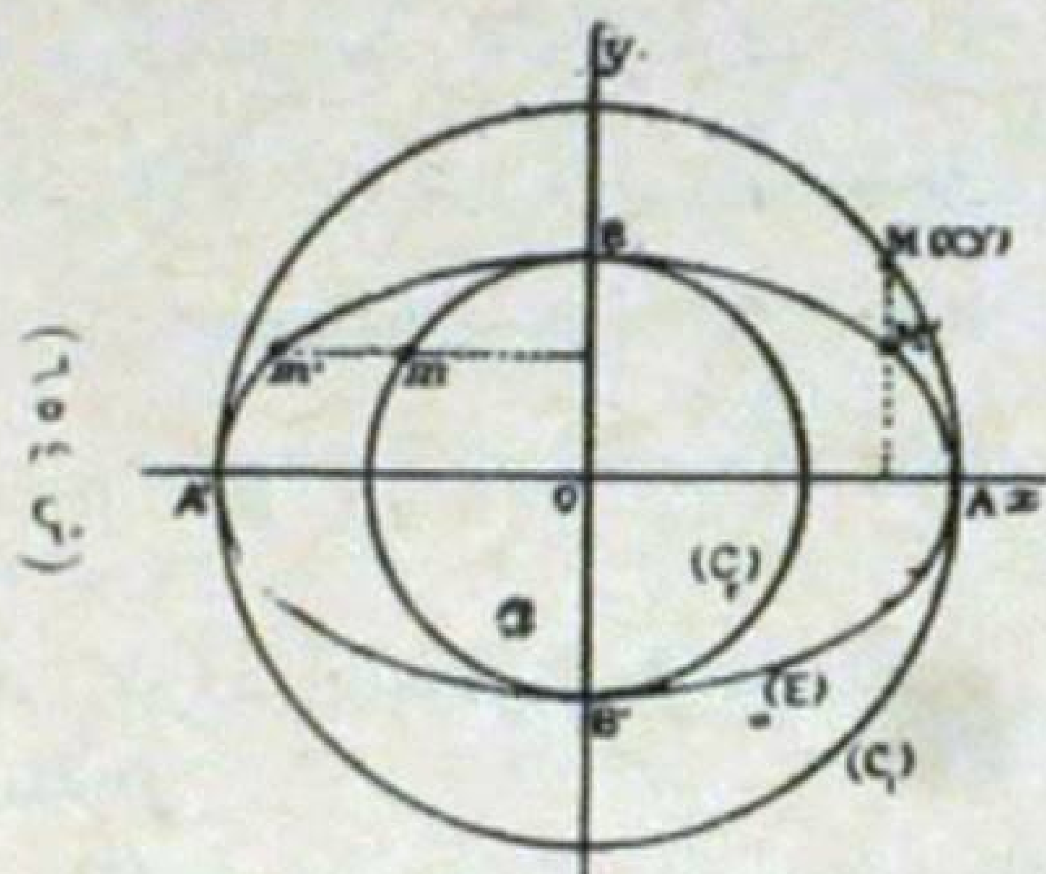
میتوان معادلهٔ (۱) را بصورت $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$ نوشت.

ازینرو میتوان دایره را حالت خاصی از بیضی دانست . دراین حالت خاص طولهای دومحور باهم مساوی و دو کانون برهم منطبق هستند.

۸۴۳ - تعبیری از معادلهٔ بیضی - دایرهٔ (C_1) بمعادلهٔ $x^2+y^2=R^2$ را درنظرمیگیریم ونظیر هر نقطه مانند M بمختصات x و y ازاین دایره نقطهٔ M' را که مختصاتش عبارتنداز :

$x=X$ و $y=kY$ (k عددی‌است مثبت)

اختیار میکنیم (ش ٦٥٤) بعبارت‌دیگر طولهای نقاط مختلف دایره‌را تغییر نمیدهیم ولی عرضهای نقاط‌مختلف آنرا درعدد مثبت k ضرب میکنیم.



(ش ٦٥٤)

مختصات نقطهٔ M' در رابطهٔ

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{k^2R^2}=1 \quad \text{و یا} \quad x^2+\frac{y^2}{k^2}=R^2$$

صادق‌هستند. بنابراین نقطهٔ M' روی یك بیضی‌واقع‌است که‌طول محورهای آن ۲R و ۲kR میباشد. اگر k کوچکتراز ۱ باشد ۲R طول محور اطول بیضی‌است و دایرهٔ (C_1) دایرهٔ اصلی این‌بیضی میباشد واگر k بزرگتراز ۱ باشد ۲R طول محور اقصر بیضی است.

بهمین‌طریق میتوان ثابت کرد که اگر عرضهای نقاط مختلف یك دایره مانند (C_1) را تغییر ندهیم ولی طولهای نقاط مختلف آنرا در عدد مثبت k ضرب‌کنیم (ش ٦٥٤) نقاط حاصل روی بیضی بمعادلهٔ $\frac{x^2}{k^2R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$ واقع میباشد.

نتیجه - بیضیی را که محوراطولش $AA'=2a$ و محور اقصرش $BB'=2b$ میباشد درنظر میگیریم. برای بدست‌آوردن نقاط این بیضی‌کافیست که :

الف ـ یا عرضهای جمیع نقاط دایرهٔ بقطر 'AA (دایرهٔ اصلی) را درعدد $\frac{b}{a}$ ضرب کنیم (ولی طولهای آنهارا تغییر ندهیم)

ب ـ یا طولهای جمیع نقاط دایرهٔ بقطر 'BB را در عدد $\frac{a}{b}$ ضرب کنیم (ولی عرضهای آنها را تغییر ندهیم)

برعکس واضح است که اگر عرض یکی از نقاط بیضی را در $\frac{a}{b}$ ضرب کنیم ولی طول آنرا تغییر ندهیم نقطهٔ حاصل روی دایرهٔ بقطر 'AA واقع خواهد بود وهمچنین اگر طول یکی از نقاط بیضی را در $\frac{b}{a}$ ضرب کنیم ولی عرض آنرا تغییرندهیم نقطهٔ حاصل روی دایرهٔ بقطر 'BB واقع خواهد بود.

۸۴۴ ـ مورد استعمال ـ طریقهٔ دیگر برای ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه یابی.

بیضی (E) را در نظر میگیریم و محور اطول آنرا 'AA و محور اقصر آنرا 'BB مینامیم و یك نقطه مانند M روی این بیضی اختیار میکنیم و از M دوخط بترتیب برخطوط 'AA و 'BB عمودمیکنیم تا اولی دایرهٔ بقطر 'AA را درنقطهٔ 'M ودومی دایرهٔ بقطر 'BB را درنقطهٔ ''M قطع کند بطوریکه M و 'M دریك طرف خطراست 'AA و همچنین نقاط M و ''M در یك طرف خطراست 'BB واقع باشند (ش ۶۵۵) اگر مختصات M را (y و x) و مختصات 'M را ('y و 'x) ومختصات ''M را (''y و ''x) بنامیم نظر بآنچه گفتیم داریم:

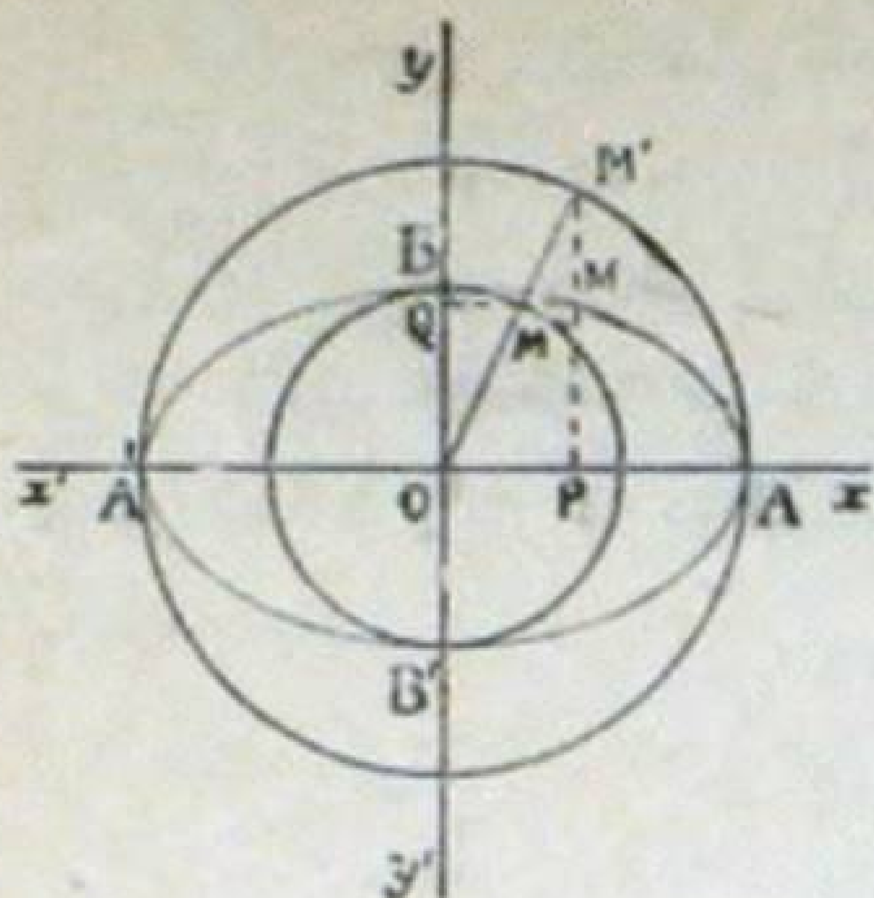
$$M \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \qquad M' \left| \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \times \frac{a}{b} \end{array} \right. \qquad M'' \left| \begin{array}{l} x'' = x \times \frac{b}{a} \\ y'' = y \end{array} \right.$$

و از روابط فوق میتوان نتیجه گرفت:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''}$$

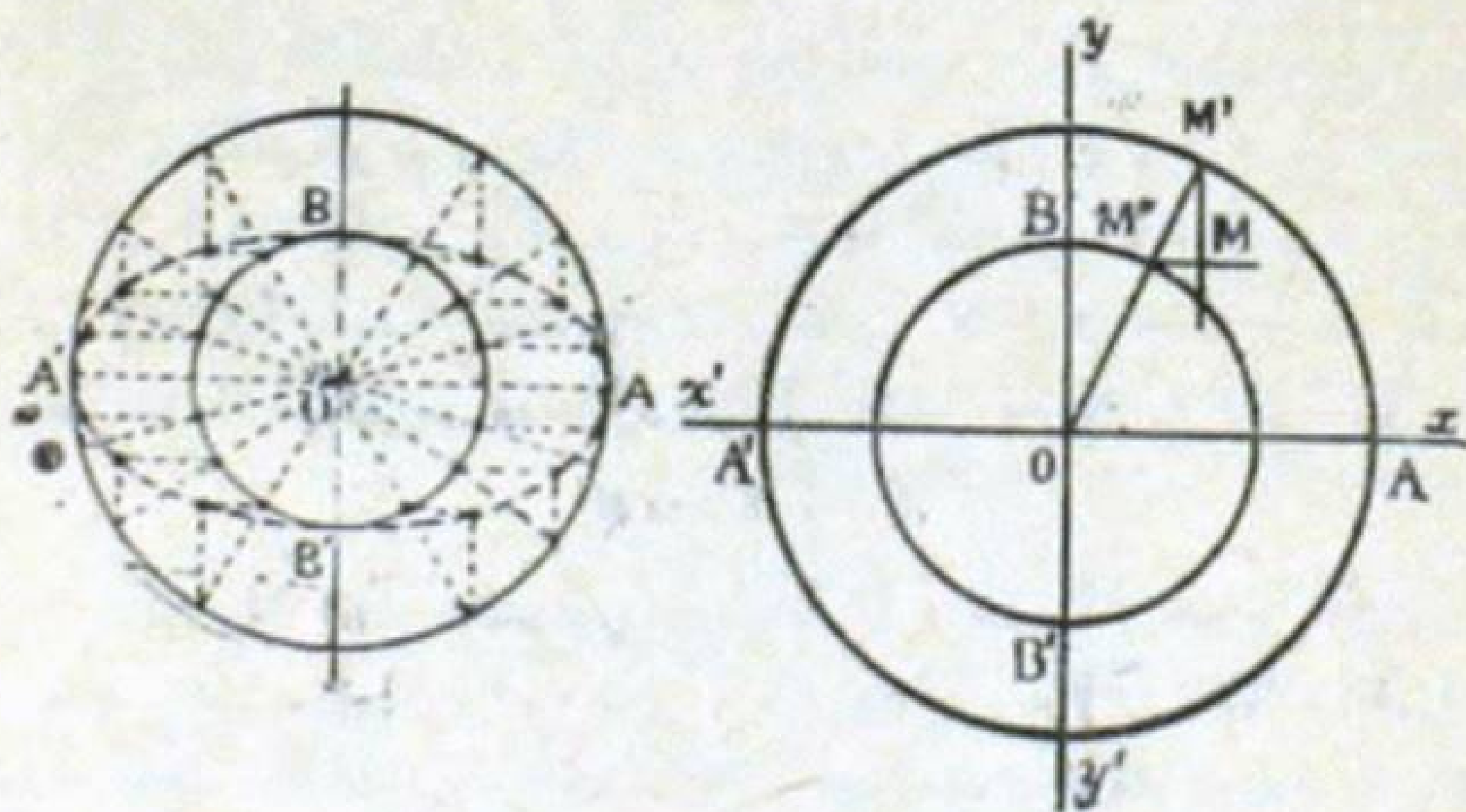
اما $\frac{y'}{x'}$ ضریب زاویهٔ خط 'OM است و $\frac{y''}{x''}$ ضریب زاویهٔ خط

''OM میباشد پس نقاط 'M و ''M با نقطهٔ O روی یك خط راست واقع هستند و گذشته ازاین چون مختصات متناظر نقاط 'M و''M متحدالعلامه هستند این دو نقطه روی خط راست ''OM'M در یك طرف نقطهٔ O واقعند.



(ش ۶۵۵)

بنابراین اگر 'AA و 'BB برحسب طول و وضع معلوم باشند برای بدست آوردن نقطه‌ای مانند M از بیضی کافیست دودایره بقطرهای 'AA و 'BB رسم کنیم و از نقطهٔ O نیم‌خطی بگذرانیم که دایرهٔ اول را در نقطهٔ 'M و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ ''M قطع کند واز 'M و ''M بترتیب دوخط عمودبر 'AA و 'BB فرود آوریم. فصل‌مشترك ایندو عمود نقطه‌ایست‌ازبیضی (ش۶۵۶ ـ الف) باین‌ترتیب میتوان نقاط مختلف بیضی را تعیین کرد (ش۶۵۶ ـ ب)

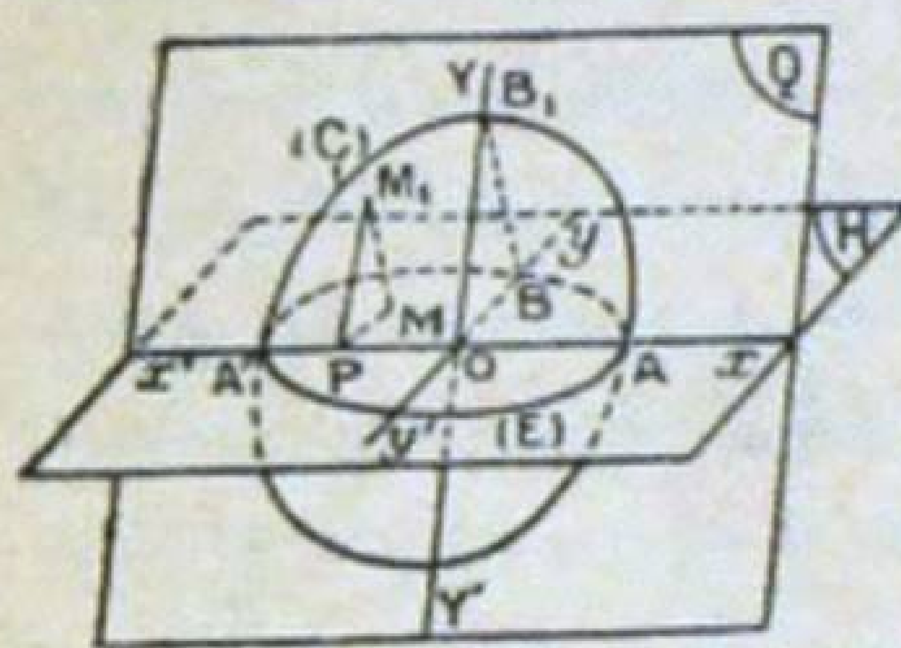


(ش ۶۵۶ ـ الف) (ش ۶۵۶ ـ ب)

تصویر قائم دایره وبیضی

۸۴۵ ـ قضیه ـ **تصویر قائم هردایره روی صفحه‌ای که نه برصفحهٔ آن دایره عمود و نه باآن موازی باشد یك بیضی است.**

چون تصاویر یك شکل روی دو صفحهٔ متوازی باهم مساویند (شمارهٔ ٦٢٠ مقالهٔ پنجم) برای اثبات قضیه میتوانیم فرض کنیم که صفحهٔ تصویر H از مرکز دایره میگذرد. بنابراین دایرهٔ (C_1) را که مرکزش در صفحهٔ تصویر H واقع است درنظر میگیریم و صفحهٔ دایرهٔ (C_1) را صفحهٔ Q و مرکز این دایره را نقطهٔ O مینامیم (ش ٦٥٧-الف). صفحهٔ H دایرهٔ (C_1) را در دو نقطهٔ A و A' که دو انتهای یکی ازقطرهای دایرهٔ (C_1) هستند قطع میکند.



(ش ٦٥٧ - الف)

انتهای یکی از دو شعاع دایرهٔ (C_1) را که برقطر AA' عموداست نقطهٔ B_1 و تصویر B_1 را بر صفحهٔ H نقطهٔ B مینامیم و شعاع دایرهٔ (C_1) را a و اندازهٔ OB را b میخوانیم اگرزاویهٔ حادهٔ دوصفحهٔ H و Q را α بنامیم واضح است که $b=a\cos\alpha$

درصفحهٔ H خطوراست A'A را محور x'x و جهت مثبت آنرا از O بطرف A میگیریم و خط راست OB را محور y'y و جهت مثبت آنرا از O بطرف B اختیار میکنیم و در صفحهٔ Q همان محور x'x را محور طولها (X'X) و خط راست OB_1 را محور Y'Y و جهت مثبت آنرا از O بطرف B_1 میگیریم. معادلهٔ دایرهٔ (C_1) در صفحهٔ Q عبارتست از:

$$X^2+Y^2=a^2$$

اگر M_1 نقطهٔ دلخواهی ازصفحهٔ Q ونقطهٔ M تصویر آن برصفحهٔ H باشد وعمود M_1P رابرمحور x'x فرودآوریم (ش ٦٥٧ - الف) نظر بقضیهٔ سه‌عمود MP نیز برمحور x'x عموداست و ازتشابه دومثلث BOB_1 و MPM_1 حاصل میشود:

$$\frac{PM}{PM_1}=\frac{b}{a}=\dots\dots(=\cos\alpha) \qquad (١)$$

مختصات M_1 درصفحهٔ Q عبارتنداز $X=OP$ و $Y=PM_1$

مختصات M درصفحهٔ H عبارتند از $x=OP$ و $y=PM$

وچون ملاحظه کنیم که PM_1 و $\overline{PM}$ متحدالعلامه هستند از تساوی (١) حاصل میشود:

$$Y=\frac{a}{b}y \quad \text{ویا} \quad \frac{y}{Y}=\frac{b}{a} \qquad (٢)$$

برای آنکه نقطهٔ M(x و y) متعلق بتصویر دایرهٔ (C_1) باشد (ش ٦٥٧ - ب) لازم و کافیست که نقطهٔ M_1 روی دایرهٔ (C_1) باشد یعنی لازم و کافیست که داشته باشیم:

$$X^2+Y^2=a^2$$

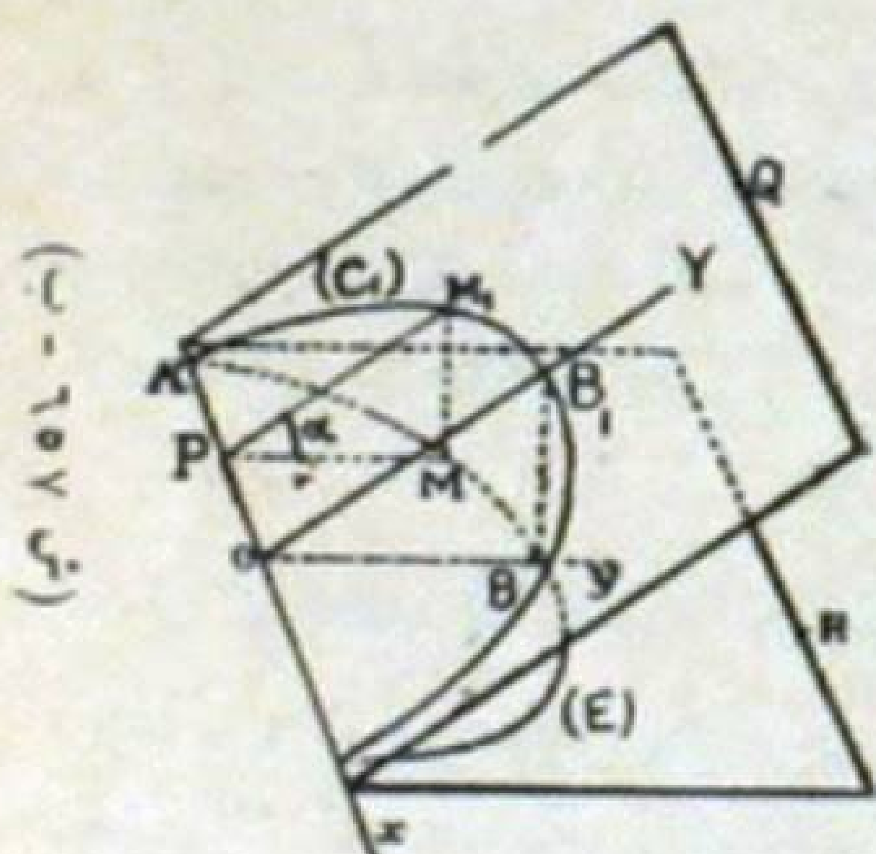
ویا نظر برابطهٔ (٢)

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2$$

وازآنجا

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

یعنی نقطهٔ M روی بیضی (E) که محور اطولش AA' است و نقطهٔ B یکی از دو انتهای محور اقصرش میباشد واقع است. بعبارت دیگر بیضی (E) تصویر دایرهٔ (C_1) میباشد.



(ش ٦٥٧ - ب)

تبصره - وقتی یك دایره را بر یك صفحه تصویرمیکنیم محور اطول بیضی تصویر عبارتست از تصویرقطری ازدایره که باصفحهٔ تصویر موازیست و محور اقصر بیضی تصویر عبارتست از تصویر قطری از دایره که روی یکی از خطوط بزرگترین شیب صفحهٔ دایره نسبت بصفحهٔ تصویر واقع است.

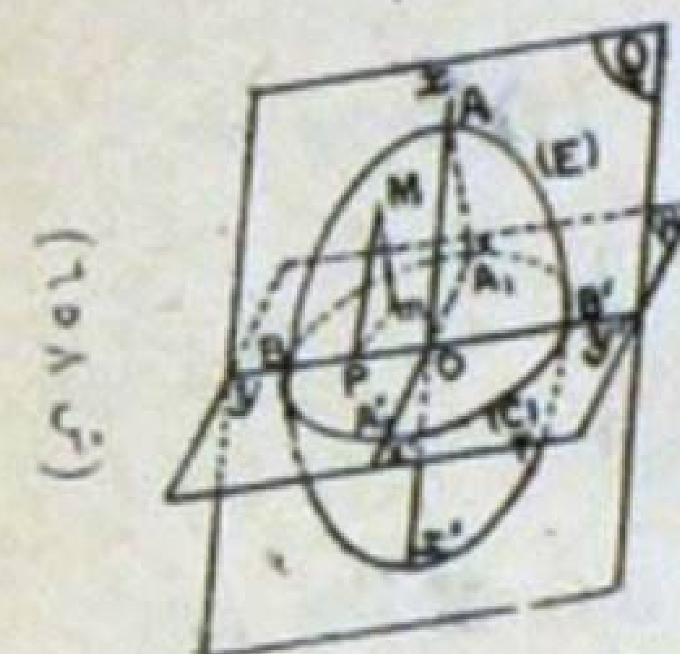
٨٤٦ - قضیه - هربیضی را میتوان تصویر یك دایره دانست.

بیضی (E) را درصفحهٔ H درنظر میگیریم (ش ٦٥٧-ب) واز نقطهٔ B انتهای محور اقصر بیضی عمودی برصفحهٔ H اخراج میکنیم و روی این عمود قطعه‌خط BB_1 را مساوی با $c=\sqrt{a^2-b^2}$ (نصف فاصلهٔ کانونی بیضی) جدا میکنیم. اگر درصفحهٔ Q که از نقاط A و A' و B_1 میگذرد

دایره‌ای بقطر AA' رسم کنیم این دایره از نقطهٔ B_1 میگذرد زیرا : $\overline{OB'_1}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{BB'_1}^2$ یعنی $\overline{OB'_1}^2 = b^2+c^2=a^2$ وتصویرش برصفحهٔ H عبارتست از بیضی (E)

۸۴۷ - قضیه - هردایره را میتوان تصویر یک بیضی دانست.

دایرهٔ (C_1) را درصفحهٔ تصویر H در نظر میگیریم و فرض میکنیم $B'B$ یکی ازقطرهای این دایره باشد وقطر A'_1A_1 را عمود برقطر $B'B$ رسم میکنیم (ش ٦٥٨) حال از نقطهٔ A_1 عمودی برصفحهٔ H اخراج میکنیم و روی این عمود نقطهٔ دلخواهی مانند A در نظر میگیریم وصفحه‌ای را که از نقطهٔ A وخط $B'B$ میگذرد صفحهٔ Q مینامیم . در صفحهٔ Q یک بیضی میتوان رسم کرد که محور اقصرش $B'B$ ویکی از دوسر محور اطولش نقطهٔ A باشد این بیضی را (E) مینامیم.



(ش ٦٥٨)

اگر درصفحهٔ H خطراست $B'B$ رامحور $y'y$ وجهت‌مثبت آنرا از O بطرف B' بگیریم وخط راست A'_1A_1 را محور $X'X$ اختیار کنیم وشعاع دایرهٔ (C_1) را b بنامیم معادلهٔ دایرهٔ (C_1) عبارت خواهد بود از :

$$X^2+y^2=b^2$$

درصفحهٔ Q همان محور $y'y$ را محور عرضها اختیار میکنیم وخط راست OA را محور $x'x$ و جهت مثبت آنرا از O بطرف A میگیریم و طول OA را a مینامیم. همانطور که در شمارهٔ ۸٤٥ گفتیم اگر نقطهٔ M بمختصات (x و y) یکی از نقاط صفحهٔ Q باشد وتصویر M را روی صفحهٔ H نقطهٔ m بنامیم مختصات نقطهٔ m درصفحهٔ H عبارتند از:

$$Y=\overline{OP}=y \quad \text{و} \quad X=\overline{Pm}=\overline{PM}\times\frac{b}{a}=x\frac{b}{a}$$

برای آنکه نقطهٔ m روی دایرهٔ (C_1) واقع باشد لازم و کافیست که داشته باشیم :

$$\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=b^2$$

و یا

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

واین معادله معادلهٔ بیضی (E) درصفحهٔ Q میباشد پس دایرهٔ (C_1) را میتوان تصویر بیضی (E) دانست.

موارد استعمال

الف - مساحت بیضی

۸۴۸ - درشمارهٔ ٦٤٣ (مقالهٔ پنجم) گفتیم که اگر مساحت قسمتی از یک‌صفحه را که یک منحنی محدود شده باشد S و مساحت تصویر آنرا برصفحهٔ دیگری S' و زاویهٔ حادهٔ آن دوصفحه را α بنامیم داریم:

$$S'=S\cos\alpha$$

چون بیضی (E) متعلق بصفحهٔ H را میتوان تصویر دایرهٔ (C_1) متعلق بصفحهٔ Q دانست (ش ٦٥٧ـب) و کسینوس زاویهٔ حادهٔ دوصفحهٔ H و Q مساویست با $\frac{b}{a}$ پس :

$$\text{(E) مساحت بیضی} = (C_1) \text{ مساحت دایرهٔ} \times\frac{b}{a}=\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab$$

یعنی : اگر نصف طول محور اطول بیضی a و نصف طول محور اقصر آن b باشد مساحت بیضی مساویست با πab

ب - حل مسائل ترسیم هندسی درمورد بیضی

۸۴۹ - اگردرشکل ٦٥٧ صفحهٔ Q را حول خطراست AA' دوران دهیم تا برصفحهٔ H منطبق شود پس‌ازاین‌دوران دایرهٔ (C_1) بردایرهٔ اصلی بیضی E که آنرا (C) مینامیم منطبق میشود☆ واگر وضع جدید یک نقطه مانند M_1 از صفحهٔ Q را در صفحهٔ H نقطهٔ m بنامیم و تصویر نقطهٔ M_1 برصفحهٔ H نقطهٔ M باشد (ش ٦٥٩) واضح است که نقاط M و m روی خط راستی که بر لولای AA' عموداست واقع میباشند واگر پای این‌عمود

☆ فرض میکنیم این دوران طوری انجام‌گیرد که نقطهٔ B با وضع جدید B_1 که آنرا نقطهٔ b مینامیم در یکطرف خطراست AA' واقع‌شوند.

را P بنامیم داریم $\frac{PM}{Pm}=\frac{b}{a}$ (اگر زاویهٔ حادهٔ دوصفحهٔ Q و H را α

(ش ۶۵۹)

بنامیم این نسبت مساویست با cosα)

باین‌طریق بازای هر نقطه‌مانند M_1 ازصفحهٔ Q میتوان‌دونقطه مانند M و m ازصفحهٔ H بدست آورد. دراین‌مقام نقاط M و m را نظیر یکدیگر میگوییم‌و برای سهولت بیان نقطهٔ m را **تسطیح نقطهٔ M** مینامیم و نقطهٔ M را **ترفیع نقطهٔ m** میخوانیم.

هرگاه نقطه‌ای درصفحهٔ شکل درنظر بگیریم میتوان نظیر آنرا با درنظر گرفتن قاعدهٔ زیر بدست آورد:

اگر نقاط M و m نظیر یکدیگر و m تسطیح و M ترفیع باشد این‌دو نقطه دریك‌طرف خط‌راست AA' واقعندو خط‌راست Mm برلولای AA' درنقطه‌ای مانندP عموداست و داریم:

$$\frac{PM}{Pm}=\frac{b}{a}$$

بادرنظر گرفتن مطالب فوق و آنچه در شمارهٔ ۸۴۵ گفتیم واضح‌است که:

هرنقطه که مانند M روی‌بیضی (E) درنظر بگیریم و آنرا ترفیع بنامیم تسطیح نظیر آن یعنی m روی دایرهٔ اصلی بیضی واقع است. وهمچنین هرنقطه که مانند m روی دایرهٔ اصلی بیضی (E) درنظر بگیریم و آنرا تسطیح‌بنامیم ترفیع‌نظیر

آن یعنی M روی بیضی واقع است.

نظیر هرخط راست مانند D که آنرا ترفیع بنامیم یك خط راست مانند d (تسطیح خط D) بدست میآید. زیرا خط D را میتوان در صفحهٔ H تصویر خطی مانند D_1 متعلق بصفحهٔ Q دانست و پس‌از دوران مذکور خط D_1 برخط راستی مانند d ازصفحهٔ H منطبق‌میشود - اگر d معلوم باشد میتوان D را مشخص کرد.

واضح است که خطوط D و d یا یکدیگر را روی خط راست AA' قطع‌میکنند ویا هردو باخط AA' موازی هستند. واگر خطی مانند MT در نقطهٔ M بربیضی (E) مماس باشد خط نظیر آن یعنی mT در نقطهٔ m بادایرهٔ اصلی مماس‌است (ش۶۵۹) وبرعکس☼.

ملاحظات فوق‌را میتوان برای حل کردن بعض مسائل مربوط به‌بیضی بکار برد.

۸۵۰ - مسئلهٔ ۱ - تعیین فصل مشترکهای یك خط راست با یك‌بیضی (این مسئله را در شمارهٔ ۸۲۵ بطریق دیگری حل کرده‌ایم)

فرض میکنیم محورهای AA' و BB' بیضی برحسب طول و وضع معلوم باشند و میخواهیم فصل مشترکهای خط معلومی مانند L را با این بیضی تعیین کنیم (ش ۶۶۰) دایرهٔ اصلی بیضی (دایرهٔ بقطر AA') را رسم میکنیم و تسطیح‌های نقاط B و B' را بترتیب b و b' و فصل‌مشترك خط L راباخط AA' نقطهٔ c مینامیم و بدوا تسطیح خط L را معین‌میکنیم. این تسطیح ازنقطهٔ c

(ش ۶۶۰)

☼ زیرا اگر M و M' دونقطهٔ مجاور روی‌بیضی (E) باشند نظایر آنها m و m' دونقطهٔ مجاور روی دایرهٔ اصلی هستند واگر قاطع MM' بسمت‌وضع حدی میل کند و بربیضی مماس شود قاطع mm' نیز بسمت وضع‌حدی میل خواهد کرد و بردایرهٔ اصلی مماس خواهد شد.

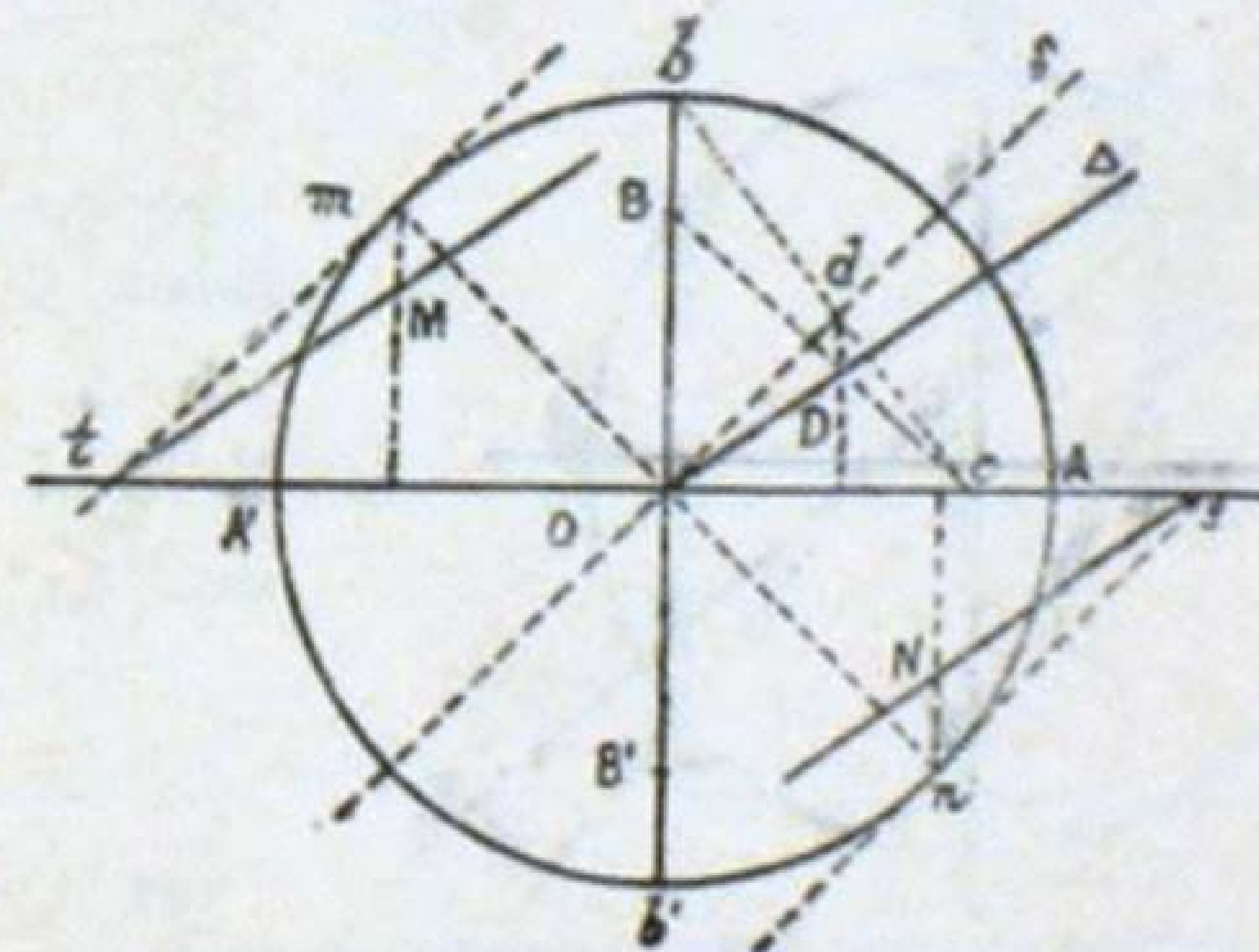
میگذرد و کافیست یك نقطهٔ دیگر از آنرا مشخص کنیم. برای این کار نقطه‌ای مانند D روی خط L اختیار وخط DB' را رسم میکنیم تا لولا یعنی AA' را در نقطه ای مانند e قطع کند. تسطیح خط DB' عبارتست از خط eb' وتسطیح نقطهٔ D از یك طرف روی خط eb' و از طرف دیگر روی عمودی که از D برلولا رسم شود واقع است. این تسطیح را d مینامیم. بنابراین تسطیح خط L عبارتست ازخط cd که آنرا l مینامیم

اگر فصل مشترکهای خط l را با دایرهٔ اصلی نقاط m و n بنامیم ترفیع‌های این دو نقطه عبارتند از فصل مشترکهای خط L بابیضی و برای پیدا کردن ترفیع‌های نقاط m و n کافیست ازاین دو نقطه دوعمود بر AA' رسم کنیم تاخط L را در نقاط مطلوب یعنی M و N قطع کنند.

تمرین - برحسب اوضاع نسبی خط L بادایرهٔ اصلی درمسئلهٔ فوق بحث کنید ودرصورتیکه خط L باخط AA' موازی باشد مسئله‌را حل کنید.

۸۵۱ - مسئلهٔ ۲ - ترسیم مماس بر یك بیضی بموازات یك خط راست معلوم (این مسئله را در شمارهٔ ۸۳٤ بطریق دیگری حل کرده‌ایم).

فرض میکنیم محورهای AA' و BB' بیضی برحسب طول و وضع معلوم باشند و میخواهیم مماسهایی بموازات خط معلوم OΔ براین بیضی رسم کنیم. O مرکز بیضی است (ش ٦٦١)



(ش ٦٦١)

دایرهٔ اصلی بیضی (دایرهٔ بقطر AA') را رسم میکنیم و تسطیح‌های نقاط B و B' را بترتیب b و b' مینامیم و بدواً تسطیح خط OΔ را معین میکنیم

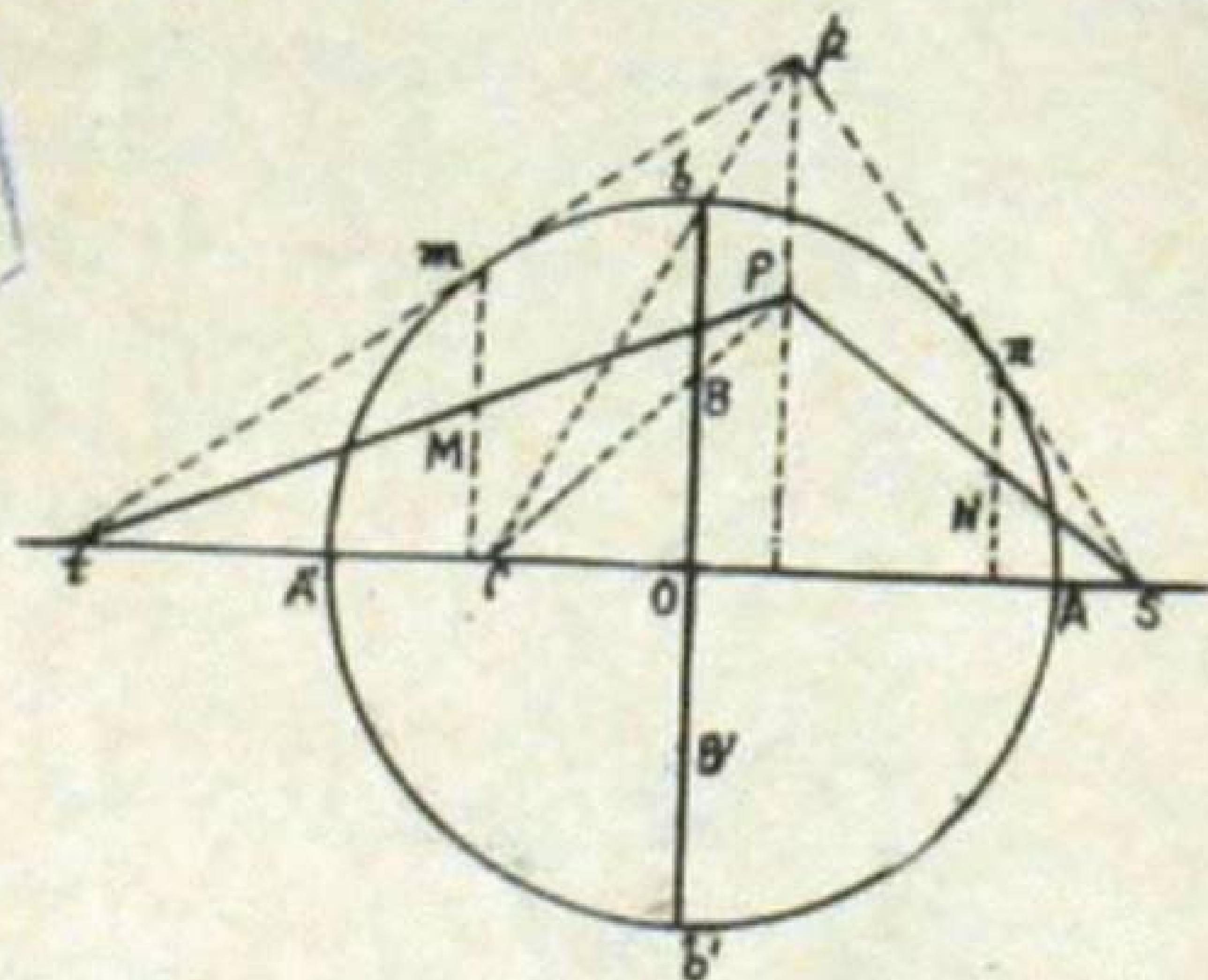
این تسطیح از نقطهٔ O میگذرد و کافیست که یك نقطهٔ دیگر از آنرا بدست آوریم. برای اینکار نقطه‌ای مانند D روی OΔ اختیار وخط DB را رسم میکنیم تا لولا را درنقطه‌ای مانند c قطع کند. تسطیح خط DB عبارتست از cb. ازاینرو تسطیح نقطهٔ D یعنی d وهمچنین تسطیح خط Δ یعنی δ را بدست میآوریم.

اکنون بردایرهٔ اصلی مماسهای mt و ns را بموازات δ رسم میکنیم (m و n نقاط تماس هستند)☼ ترفیع‌های دو خط mt و ns مماسهای مطلوبند واین دوترفیع بترتیب از نقاط t و s میگذرند وبا Δ موازیند. نقاط تماس M و N بترتیب فصل مشترکهای این دوخط باعمودهای مرسوم از m و n بر AA' میباشند.

۸۵۲ - مسئلهٔ ۳ - ترسیم مماس بر یك بیضی از یك نقطهٔ معلوم

(این مسئله را در شمارهٔ ۸۳٦ بروش دیگری حل کرده‌ایم)

فرض میکنیم محورهای AA' و BB' بیضی برحسب طول و وضع معلوم باشند ومیخواهیم ازنقطهٔ معلوم P مماسهایی براین بیضی رسم کنیم (ش ٦٦٢)



(ش ٦٦٢)

دایرهٔ اصلی بیضی (دایرهٔ بقطر AA') را رسم میکنیم و تسطیح‌های نقاط B و B' را بترتیب b و b' مینامیم وبدواً تسطیح نقطهٔ P را بدست میآوریم. برای اینکار خط PB را رسم میکنیم تا لولا را درنقطه‌ای مانند

☼ t و s فصل مشترکهای این دومماس بالولا میباشند.

c قطع کند خط cb تسطیح خط PB است. ازاینرو تسطیح نقطهٔ P یعنی p را بدست میآوریم و از نقطهٔ p مماسهای pm و pn را بر دایرهٔ اصلی رسم میکنیم (m و n نقاط تماس هستند) وفصل‌مشترکهای آنهارا باخط AA' بترتیب t و s مینامیم. ترفیع‌های دوخط pm و pn یعنی خطوط Pt و Ps مماسهای مطلوبند.

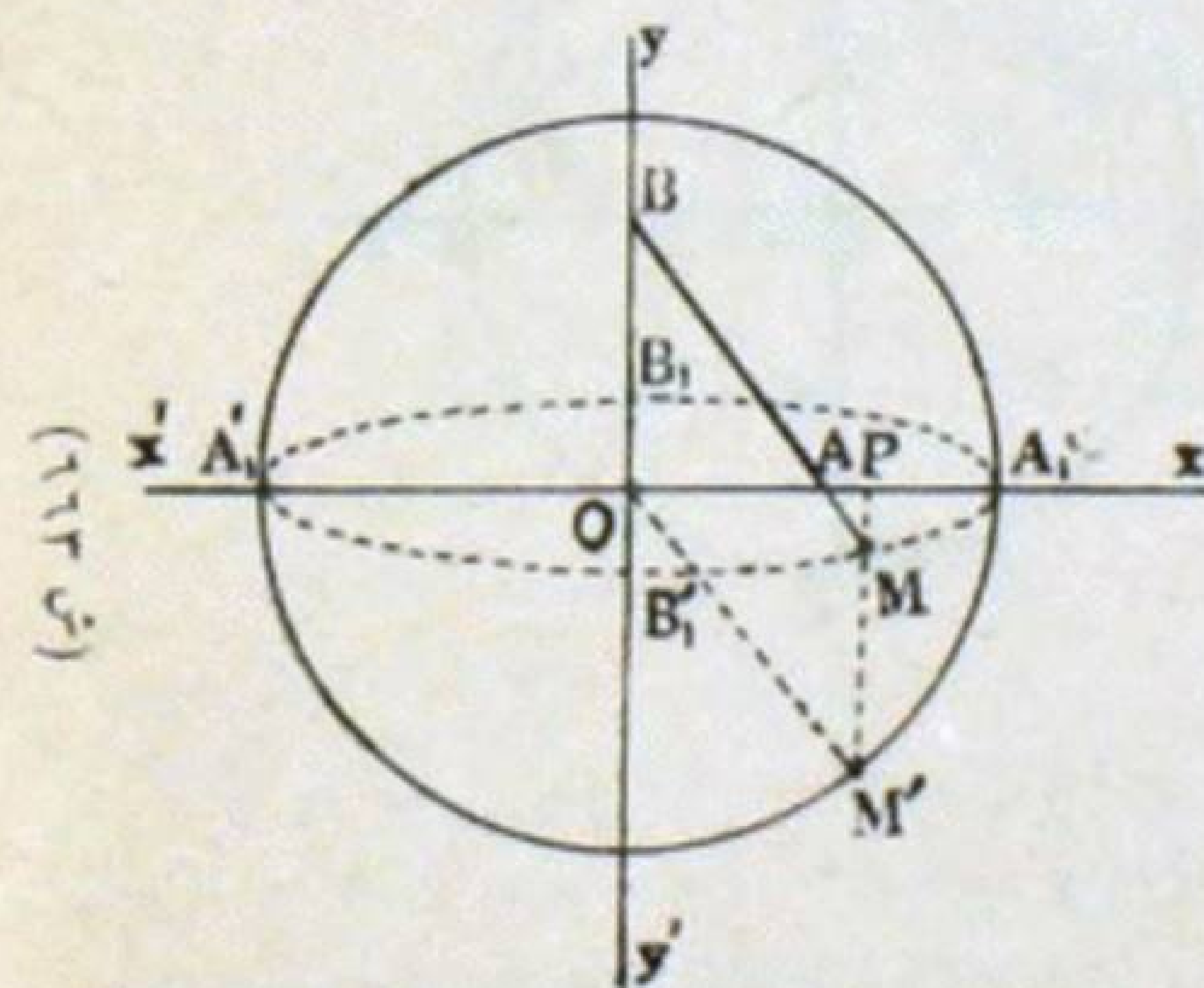
نقاط تماس M و N بترتیب فصل‌مشترکهای این‌دوخط باعمودهای مرسوم از m و n بر AA' میباشند.

تمرین – برحسب اوضاع نسبی نقطهٔ P و دایرهٔ اصلی درمسئلهٔ فوق بحث کنید.

طریقهٔ دیگر برای ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی

۸۵۳ – قضیه – هرگاه قطعه خطی بطول ثابت طوری تغییر مکان دهد که دوسرآن روی دوخطراست متقاطع وعمود برهم حرکت کنند هرنقطه که برمحمل آن قطعه خط* واقع باشد روی یك بیضی حرکت خواهد کرد.

فرض میکنیم x'Ox و y'Oy دوخط راست عمود برهم باشند وقطعه خط AB طوری تغییر مکان دهد که نقطهٔ A همواره روی خط x'Ox و نقطهٔ B روی‌خط y'Oy حرکت کند (ش ٦٦٣) و نقطه‌ای مانند M روی خطراست AB درنظر میگیریم (ممکن است M بین A و B ویا خارج از قطعه خط AB واقع باشد) و فواصل ثابت MA و MB رابترتیب b و a مینامیم (MA = b و MB = a) اگر از نقطهٔ M خطی بموازات y'y و از نقطهٔ O خطی بموازات AB رسم کنیم و فصل مشترك این دوخطرا نقطه M' بنامیم‌شکل OBMM'



(ش ٦٦٣)

* یعنی خط‌راستی که‌قطعه‌خط مزبور روی آن واقع‌است.

متوازی‌الاضلاع است و داریم $OM' = BM = a$ بنابراین وقتی قطعه خط AB تغییر مکان میدهد نقطهٔ M' روی دایرهٔ بمرکز O وبشعاع a حرکت میکند و اگرفصل‌مشترك خط MM' را با x'x نقطهٔ P بنامیم ازمثلثهای متشابه PMA و PM'O حاصل میشود:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{M'O}} = \frac{b}{a}$$

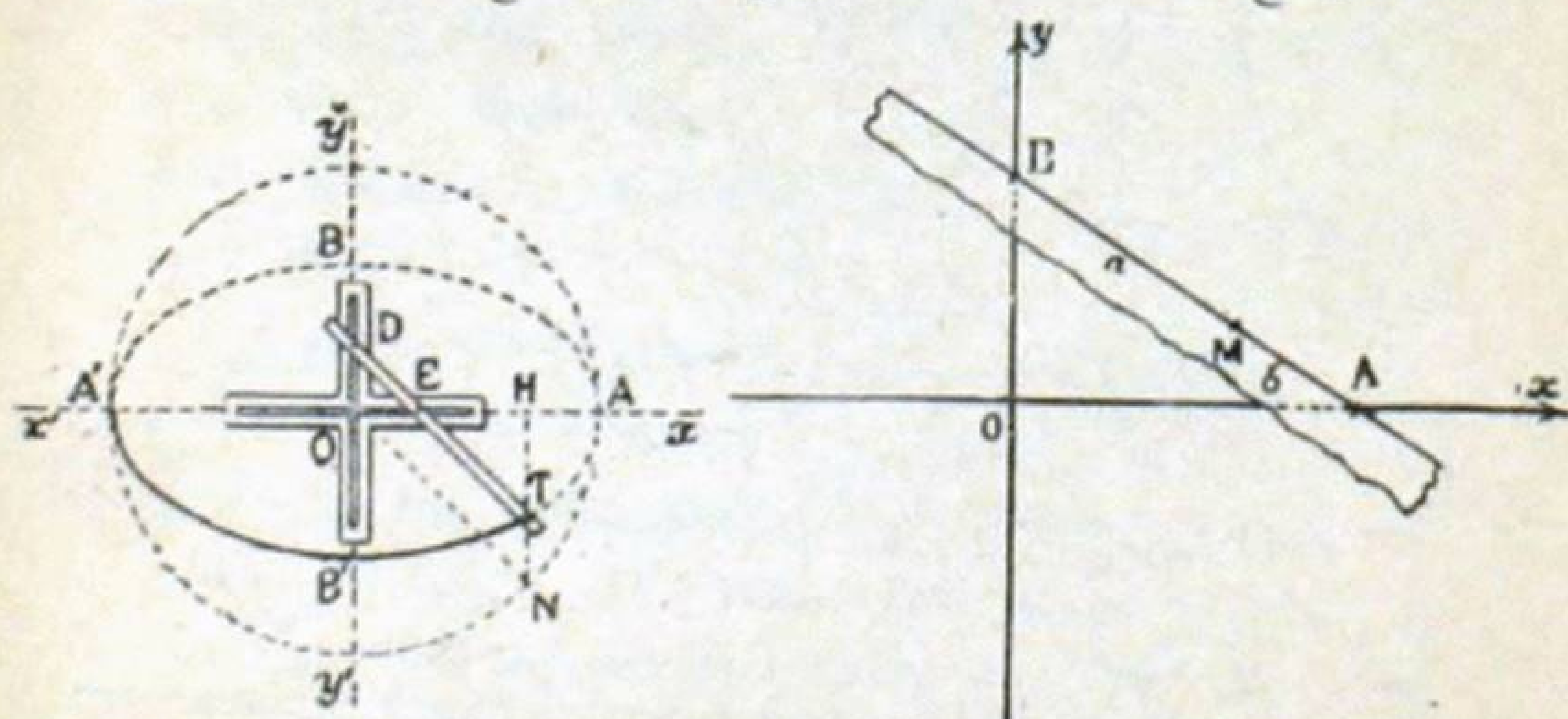
ویا

$$\overline{PM} = \overline{PM'} \times \frac{b}{a}$$

پس برای بدست آوردن نقطهٔ M' باید عرض نقطهٔ M را در عدد مثبت $\frac{b}{a}$ ضرب کنیم و طول آنرا تغییر ندهیم و نظر بشمارهٔ ۸۴۳ مکان نقطهٔ M عبارتست از یك بیضی. مرکز این بیضی نقطهٔ O است و دورأسش A_1 و A'_1 روی x'x و دو رأس دیگرش B_1 و B'_1 روی y'y واقعند. بطوریکه $OA_1 = a$ و $OB_1 = b$

تبصره – وسط قطعه‌خط AB روی یك‌دایره حرکت میکند.

۸۵۴ – ترسیم بیضی بوسیلهٔ نقطه‌یابی – برای ترسیم یك بیضی که طولهای دو محورش 2a و 2b باشد نظر بقضیهٔ فوق کافیست دو خط x'Ox و y'Oy را عمود برهم رسم کرده (ش ٦٦٤) نواری از کاغذ که لبهٔ آن خطراست باشد اختیار کنیم و روی آن سه‌نقطهٔ A و B و M را چنان اختیار کنیم که MA = b و MB = a باشد و نوار کاغذرا روی‌صفحه‌طوری حرکت‌دهیم که نقطهٔ A روی خط x'Ox و نقطهٔ B روی‌خط y'Oy حرکت کند مواضع مختلف نقطهٔ M روی بیضی مطلوب واقع هستند.



(ش ٦٦٥) (ش ٦٦٤)

تبصره - ممکن است نقاط A و M و B را دو نوع روی لبهٔ کاغذ اختیار کرد، در شکل ۶۶۳ نقاط A و B در یك‌طرف M و در شکل ۶۶۴ در دوطرف آن اختیار شده‌اند.

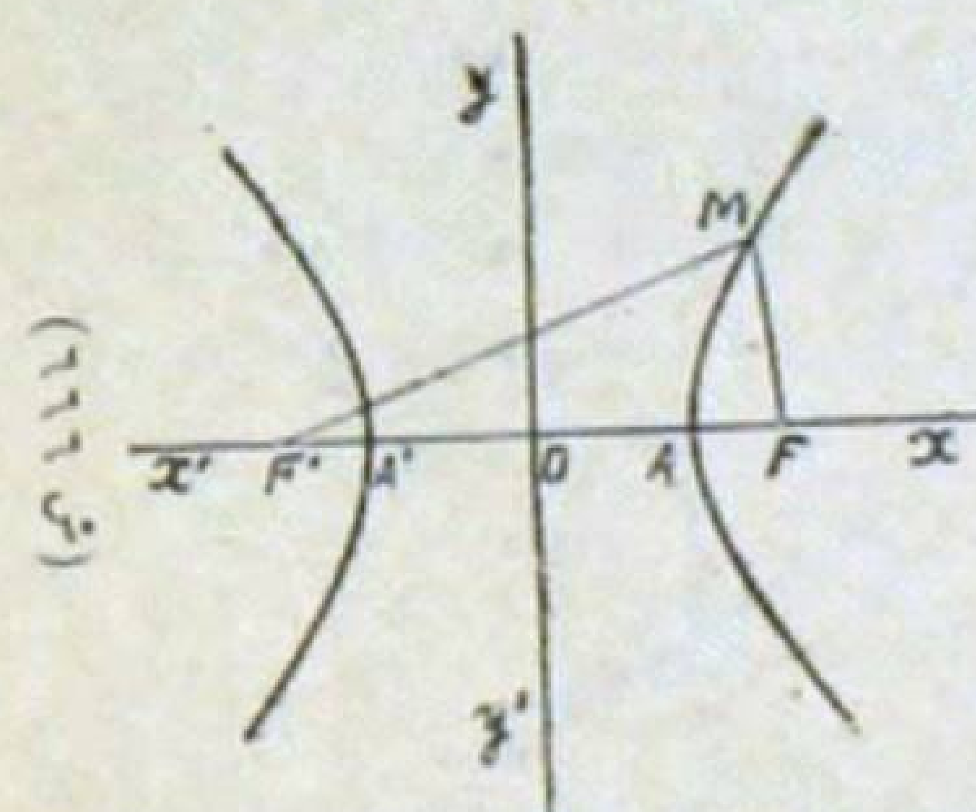
۸۵۵ - بیضی‌نگار* - با استفاده از قضیهٔ شمارهٔ ۸۵۳ افزاری بنام بیضی‌نگار برای ترسیم بیضی میسازند. چگونگی عمل با این اسباب و دلیل آن از روی شکل ۶۶۵ پیداست.

۲ - هذلولی

۸۵۶ - تعریف - درهر صفحه مکان‌هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از دو نقطهٔ معلوم واقع درهمان صفحه مساوی باطول معینی میباشد یك منحنی است که آنرا هذلولی مینامند

دو نقطهٔ معلوم را **کانونهای هذلولی** میگویند. اگر کانونهای هذلولی را F و F' و طول معین مزبور را 2a بنامیم (ش ۶۶۶) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای مانند M روی هذلولی باشد اینست که داشته باشیم:

(۱) $MF - MF' = 2a$



(ش ۶۶۶)

هریك از قطعه خطهای MF و MF' را **شعاع حامل** نقطهٔ M و فاصلهٔ F'F را **فاصلهٔ کانونی** هذلولی میگویند و این فاصله را معمولا 2c مینامند.

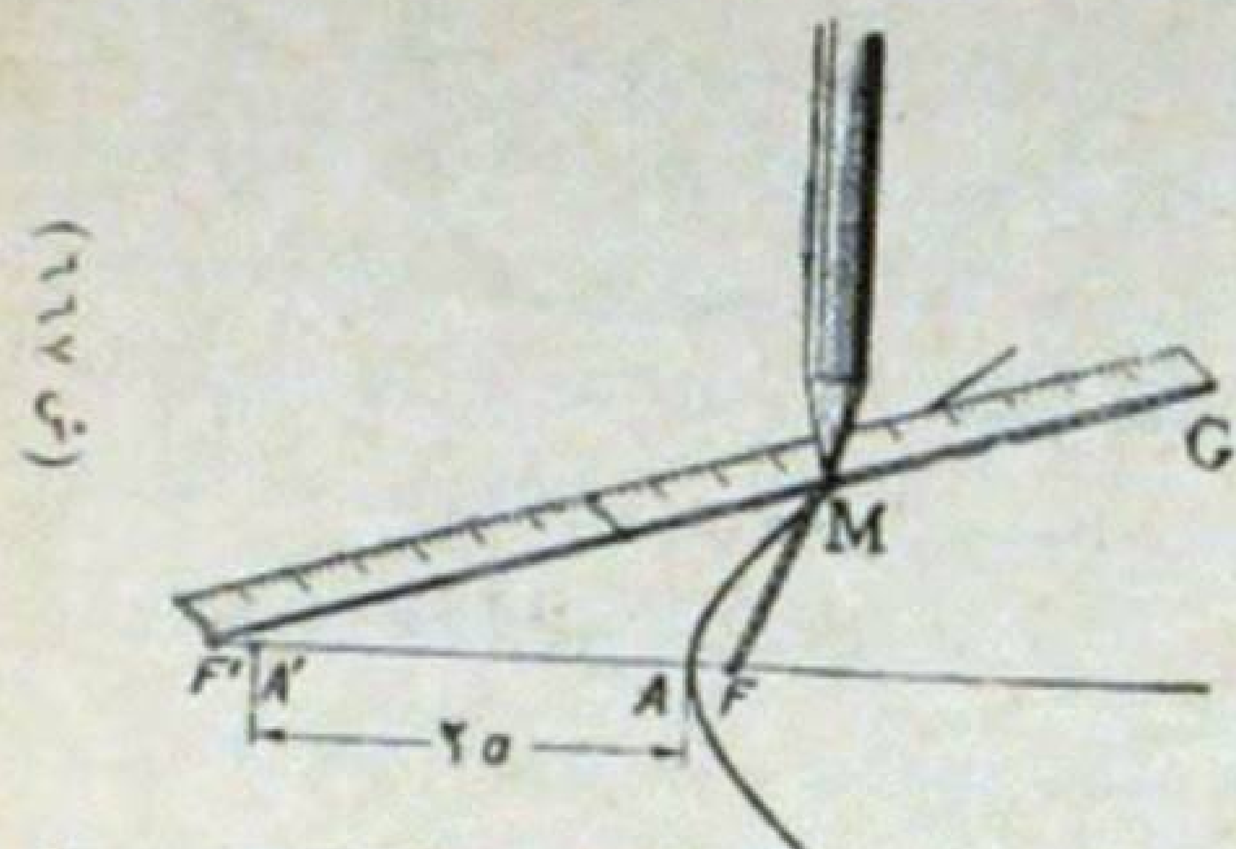
اگر نقطه‌ای مانند M روی‌خط راست F'F واقع نباشد تفاضل‌شعاع حاملهای آن یعنی $|MF - MF'|$ از 2c کوچکتر است زیرا در مثلث MFF' میتوان نوشت: $|MF - MF'| < FF'$

اگر نقطهٔ M روی قطعه‌خط F'F واقع باشد بازهم $|MF - MF'|$

* Ellipsographe

از 2c کوچکتراست ولی اگرنقطهٔ M روی یکی‌از دونیم‌خط Fx و F'x' که از امتداد دادن FF' حاصل میشود (ش ۶۶۶) واقع باشد تفاضل شعاع حاملهای آن یعنی $|MF - MF'|$ با 2c مساویست.

از آنچه گذشت معلوم میشود که باید 2a را از 2c کوچکتر اختیار کرد. یك هذلولی با در دست بودن کانونها وتفاضل شعاع حاملهای یکی‌از نقاطش مشخص میشود.



(ش ۶۶۷)

خط‌کشی اختیار و یك‌سر آنرا طوری در نقطهٔ F' ثابت‌میکنیم که خط‌کش بتواند درصفحه حرکت و حول نقطهٔ F' دوران کند و یك‌سر نخی را درنقطهٔ F بوسیلهٔ یك‌سنجاق ثابت نگاه میداریم و سر دیگرش را در نقطهٔ G بخط‌کش متصل‌میکنیم و بوسیلهٔ نوك مدادی نخ را میکشیم تاقسمت MG ازآن برخط‌کش منطبق شود و قسمت MF از آن راست باشد. در اینصورت اگر نوك مداد را حرکت‌دهیم بطوریکه‌همواره برنخ متکی باشد نوك مداد یك هذلولی رسم میکند زیرا :

$MF' - MF = (MF' + MG) - (MF + MG)$
= طول خط‌کش − طول نخ = مقدار ثابت

۸۵۷ - مرکز و محورها ورأسهای هذلولی - فرض میکنیم F و F' کانونهای یك‌هذلولی و 2a تفاضل شعاع حاملهای یکی از نقاط آن‌باشد. همانطور که در مورد بیضی دیدیم (شمارهٔ ۸۲۲) وبهمان دلیل:

وسط‌قطعه‌خط F'F که‌آنرا O مینامیم‌مرکز تقارن‌هذلولی است. نقطهٔ O را **مرکز هذلولی** میگویند.

خط راست F'F و عمود منصف قطعه‌خط F'F محورهای تقارن هذلولی هستند

هرنقطه که روی یکی‌از دو نیم‌خط Fx و F'x' که از امتداد دادن FF' بدست میآیند واقع باشد تفاضل شعاع حاملهایش مساوی با 2c است

(ش۶۶۶) بنابراین هیچیك از نقاط هذلولی روی این دو نیم‌خط واقع نیستند.

اگر A یکی از نقاط قطعه خط FF' باشد و بین نقاط O و F واقع باشد از دوشعاع حامل نقطهٔ A آنکه بزرگتر است مساویست با OA+c و آنکه کوچکتر است مساویست با OA−c پس تفاضل این دوشعاع حامل مساویست با ۲OA و برای آنکه نقطهٔ A روی هذلولی باشد لازم و کافیست که OA=a باشد. دراینصورت نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت بنقطهٔ O نیز روی هذلولی است. پس نقاط A و A' متعلق بخط راست x'x که از نقطهٔ O بفاصلهٔ a واقع هستند روی هذلولی میباشند (ش ۶۶۶) دونقطهٔ A و A' را **رأسهای هذلولی** مینامند.

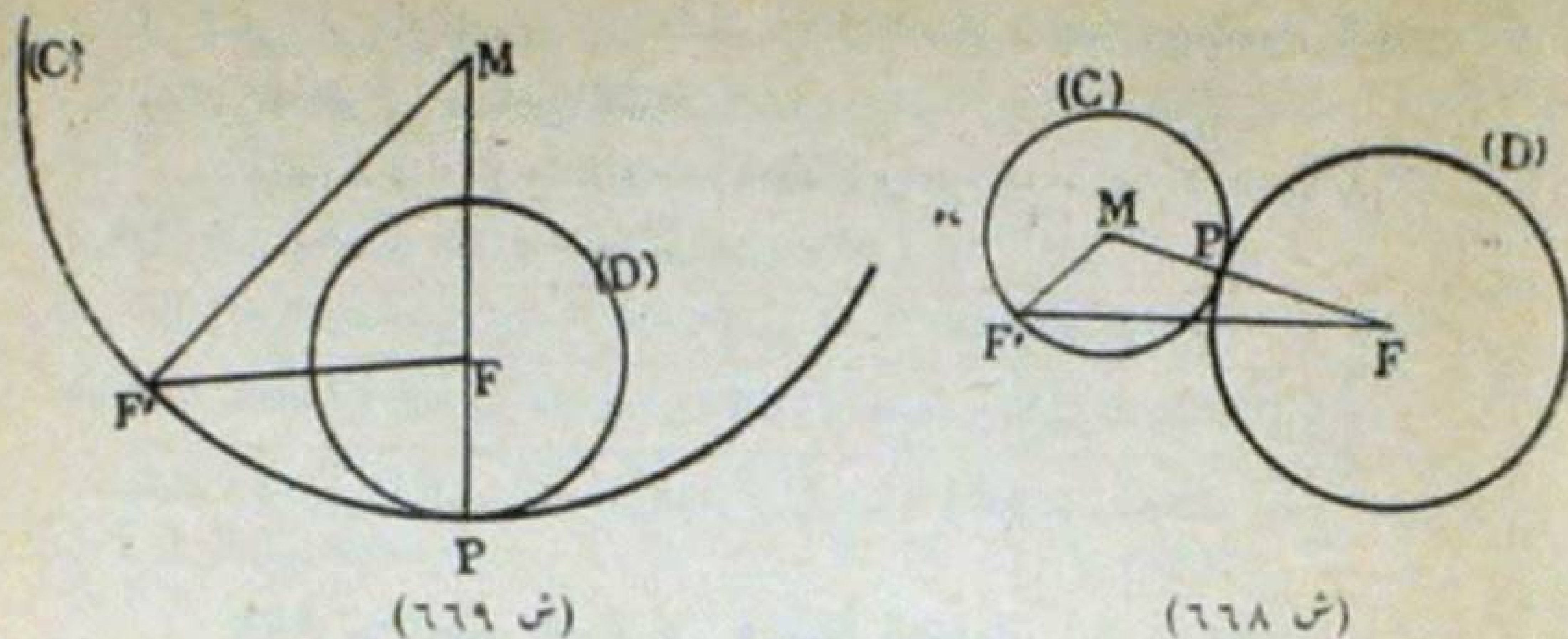
هرنقطه که روی خط y'y (عمود منصف قطعه خط FF') واقع باشد از F و F' یك فاصله است بنابراین خط y'y باهذلولی نقطهٔ مشترکی ندارد.

خط x'x را **محور کانونی** یا **محور قاطع هذلولی** وخط y'y را **محور غیر قاطع** هذلولی مینامند. گاهی نیز قطعه خط AA' را **محور کانونی هذلولی** میگویند.

خط y'y صفحه را بدو نیم‌صفحه تقسیم میکند. اگر نقطه‌ای مانند M با کانون F دریك نیم صفحه واقع باشد شعاع حامل MF' از شعاع حامل MF بزرگتر است و برای نقاطی از هذلولی که دراین نیم‌صفحه واقعند داریم MF'−MF=۲a ولی برای نقاطی از هذلولی که درنیم‌صفحهٔ دیگر (نیم‌صفحه‌ای که شامل F' است) واقعند داریم MF−MF'=۲a

۸۵۸ـ دایره‌های هادی هذلولی ـ فرض میکنیم F و F' کانونهای یك هذلولی و ۲a تفاضل شعاع حاملهای یکی از نقاط آن مانند M باشد.

اولا اگر MF−MF'=۲a باشد (ش ۶۶۸) دایرهٔ (C) که بمرکز M و بشعاع MF' رسم‌شود قطعه‌خط MF را درنقطه‌ای‌مانند P قطع‌میکند بطوریکه P بین M و F واقع میشود و FP=۲a بنابراین دایرهٔ (C) با دایرهٔ (D) که بمرکز F و بشعاع ۲a رسم‌شود در نقطهٔ P مماس‌خارج‌است.



(ش ۶۶۹)　　(ش ۶۶۸)

ثانیاً اگر MF'−MF=۲a باشد (ش۶۶۹) دایرهٔ (C) که بمرکز M و بشعاع MF' رسم شود امتداد شعاع حامل MF را درنقطه‌ای مانند P قطع میکند بطوریکه F بین M و P واقع میشود و FP=۲a بنابراین دایرهٔ (C) با دایرهٔ (D) که بمرکز F و بشعاع ۲a رسم شود درنقطهٔ P مماس داخل است.

برعکس ـ فرض‌میکنیم نقطهٔ M مرکز دایره‌ای مانند (C) باشد که از نقطهٔ F' بگذرد و در نقطه‌ای مانند P با دایرهٔ (D) مماس شود اگر دوایر (C) و (D) متماس خارج باشند (ش ۶۶۸) فاصلهٔ مراکز آنها یعنی MF مساویست با مجموع دوشعاع آنها یعنی MF'+۲a و در اینصورت داریم MF−MF'=۲a اما اگر دوایر (C) و (D) متماس داخل باشند (ش۶۶۹) چون نقطهٔ F' درخارج دایرهٔ (D) واقع است دایرهٔ (D) در داخل دایرهٔ (C) واقع میشود و فاصلهٔ مراکز آنها یعنی MF مساویست با تفاضل دو شعاع آنها یعنی MF'−۲a و دراینصورت داریم MF'−MF=۲a و در هردو صورت نقطهٔ M روی هذلولی واقع است.

دایره‌ای که مرکزش یکی از دو کانون هذلولی مثلا F و شعاعش ۲a باشد دایرهٔ هادی هذلولی نظیر کانون F نامیده‌میشود.

هرهذلولی دو دایرهٔ هادی دارد.

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر که خاصیت مهم هذلولی را بیان میکند نتیجه میشود:

قضیه ـ هرهذلولی مکان هندسی مراکز دایره‌هاییست که

از یکی از دو کانون آن بگذرند و با دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر هذلولی مماس باشند.

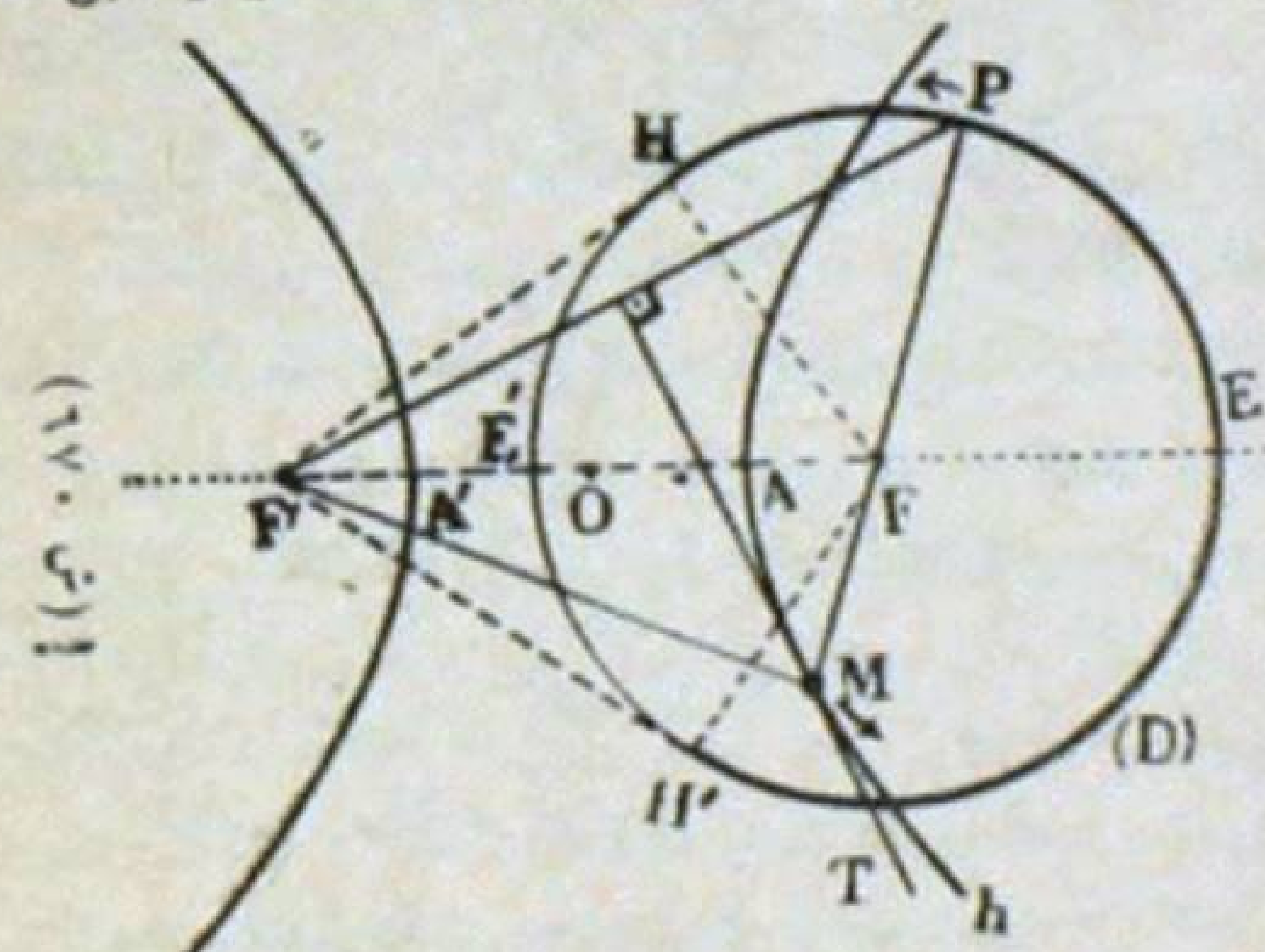
تبصره - اگر یک دایره مانند (D) و نقطه‌ای مانند F' خارج از آن در نظر بگیریم نظر باستدلال فوق:

مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که با دایرهٔ معلوم (D) مماس باشند و از نقطهٔ F' که در خارج دایرهٔ (D) واقع است بگذرند یک هذلولی است.

نقطهٔ F' یکی از کانونهای این هذلولی و دایرهٔ (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر آن میباشد.

۸۵۹ - ترسیم هذلولی بوسیلهٔ نقطه‌یابی - یک نقطه مانند P روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F اختیار میکنیم. میتوان نقطهٔ P را نقطهٔ تماس دایرهٔ (D) با دایره‌ای، مانند (C) دانست که از کانون F' بگذرد و با دایرهٔ (D) مماس شود.

مرکز دایرهٔ (C) روی هذلولی واقع است. این مرکز عبارتست از نقطهٔ M فصل مشترک خط FP با عمودمنصف قطعه‌خط F'P. این دوخط در



(ش ٦٧٠)

صورتی یکدیگر را قطع میکنند که زاویهٔ FPF' قائمه نباشد. پس اگر از نقطهٔ F' دو مماس بر دایرهٔ (D) رسم کنیم و نقاط تماس آنها را H و H' بنامیم درصورتی دوخط مزبور یکدیگر را قطع میکنند که نقطهٔ P بر هیچیک از نقاط H و H' منطبق نباشد. نقاط H و H' دایرهٔ (D) را بدو کمان تقسیم میکنند که یکی از آنها کوچکتر از نیمدایره و دیگری بزرگتر از نیمدایره است.

اگر نقطهٔ P روی کمان بزرگتر از نیمدایرهٔ HEH' واقع باشد (ش ٦٧٠)

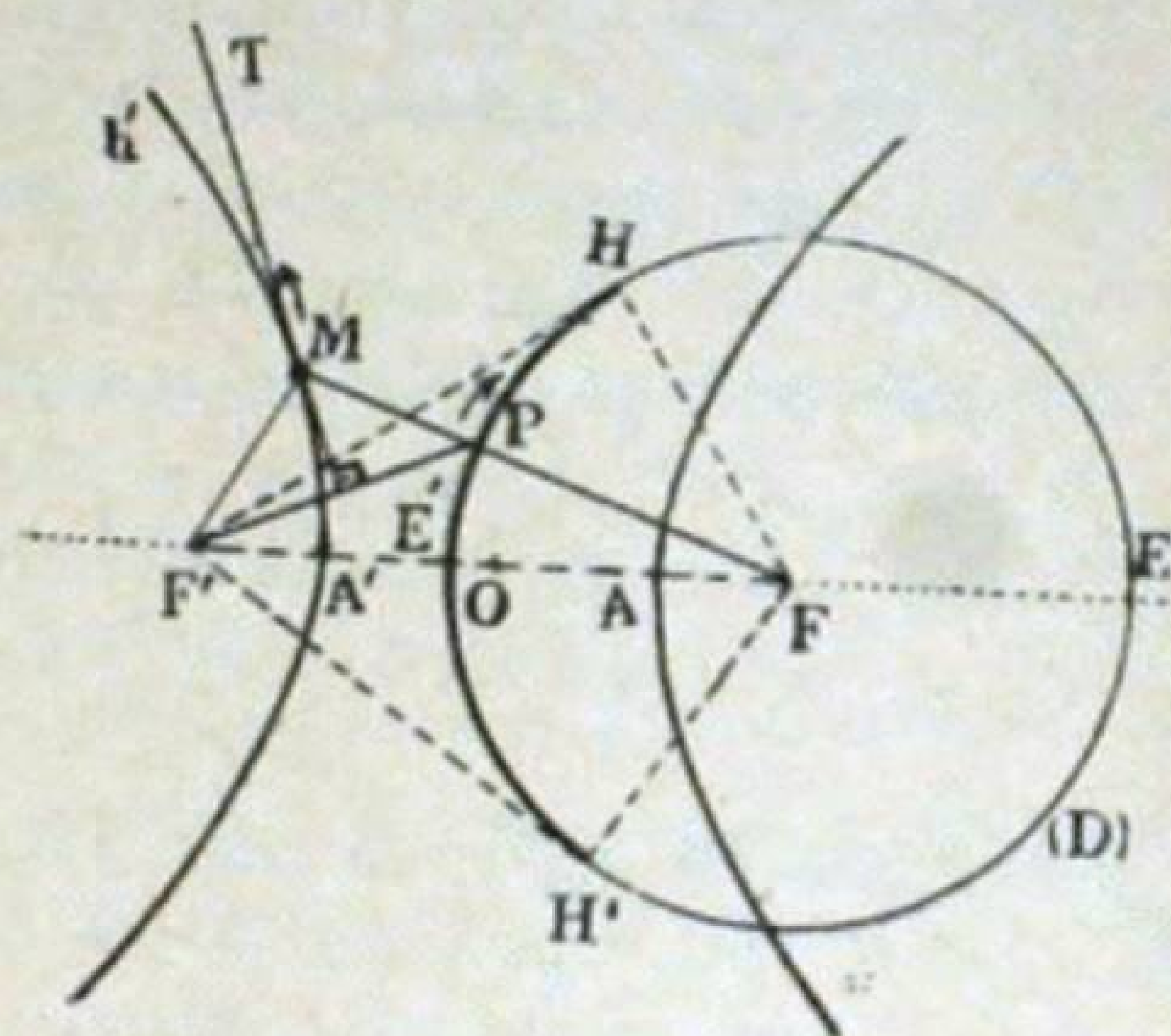
زاویهٔ FPF' حاده است و عمودمنصف قطعه خط F'P که آنرا T میناميم امتداد قطعه‌خط FP از طرف F را در نقطهٔ M قطع میکند و داریم:

$$MF' - MF = 2a$$

اما اگر نقطهٔ P روی کمان کوچکتر از نیمدایرهٔ HE'H' واقع باشد (ش ٦٧١) زاویهٔ FPF' منفرجه است و عمودمنصف قطعه‌خط F'P که آنرا T میناميم امتداد قطعه خط FP از طرف P را در نقطهٔ M قطع میکند و داریم:

$$MF - MF' = 2a$$

تبصره - اگر نقطهٔ P بر نقطهٔ E واقع روی محور کانونی منطبق



(ش ٦٧١)

شود M بررأس A از هذلولی قرار میگیرد (ش ٦٧٠) و اگر نقطهٔ P کمان کوچکتر از نیمدایرهٔ EH را از E بطرف H بپیماید و به H نزدیک شود قطعه خط F'P رفته رفته بسمت قطعه خط F'H میل میکند و خط T رفته‌رفته بسمت عمودمنصف قطعه‌خط F'H میل مینماید بطوریکه وقتی نقطهٔ P بر نقطهٔ H منطبق شود خطوط FP و T باهم موازی میشوند و نقطهٔ M که همواره روی هذلولی است بینهایت از نقطهٔ A دور میشود پس نظیر کمان EH از دایرهٔ هادی قسمت Ah از هذلولی بدست میآید (ش ٦٧٠) نظیر کمان EH' از دایرهٔ هادی قرینهٔ قسمت Ah از هذلولی نسبت بمحور کانونی بدست میآید.

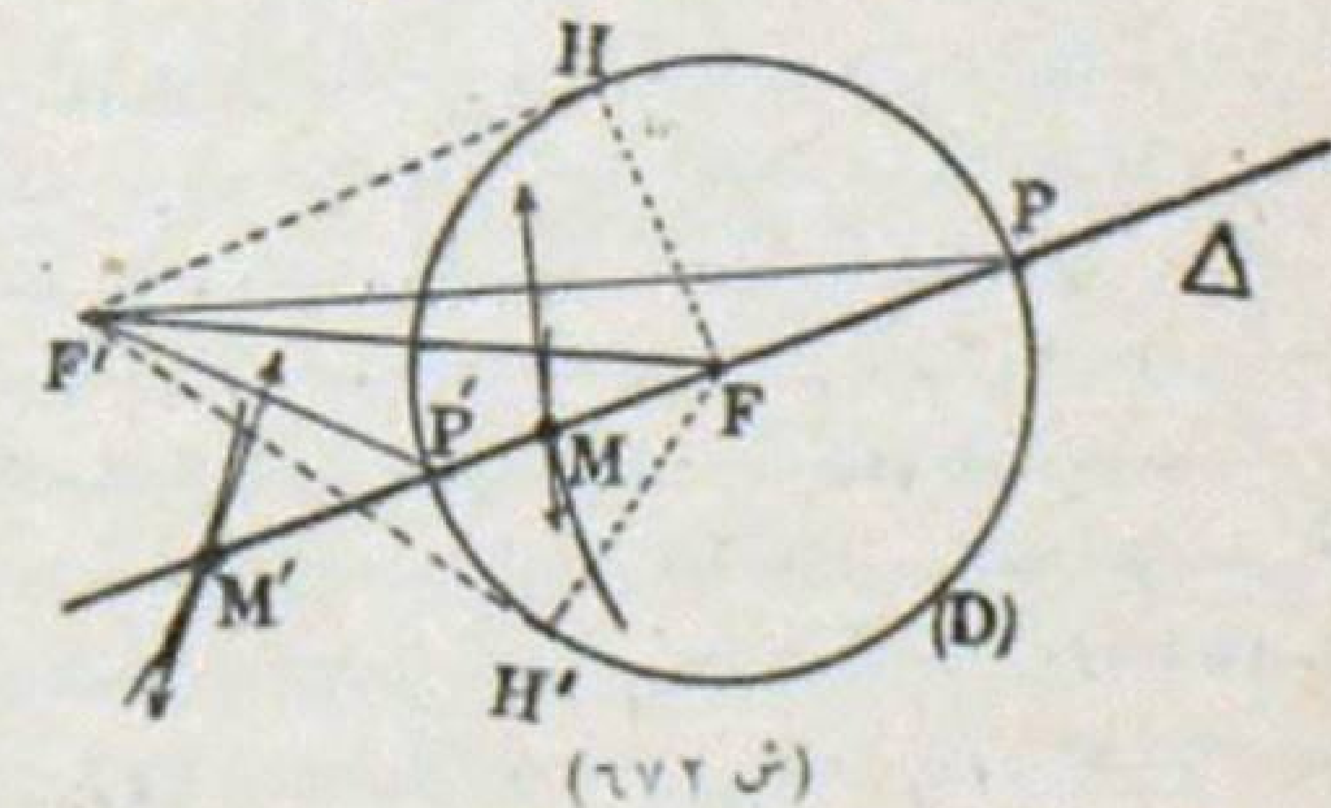
اگر نقطهٔ P بر نقطهٔ E' واقع روی محور کانونی منطبق شود M بررأس A' از هذلولی قرار میگیرد (ش ٦٧١) و اگر P کمان کوچکتر از نیمدایرهٔ E'H را از E' بطرف H بپیماید و به H نزدیک شود نقطهٔ M

قسمت $A'h'$ از هذلولی‌را می‌پیماید و بینهایت از نقطهٔ A' دور میشود. نظیر کمان $E'H'$ از دایرهٔ‌هادی قرینهٔ‌قسمت $A'h'$ از هذلولی نسبت بمحور کانونی بدست میآید.

نظر بآنچه گفتیم نظیر دو کمان HH' از دایرهٔ هادی دو شاخه از هذلولی بدست‌میآید. یکی‌ازاین دوشاخه از نقطهٔ A وشاخهٔ دیگر از‌نقطهٔ A' میگذرد. شاخهٔ اول را شاخهٔ $[F]$ و شاخهٔ دوم را شاخهٔ $[F']$ مینامیم. نقاطی که روی شاخهٔ $[F]$ واقع هستند مراکز دایره‌هایی میباشند که از F' میگذرند و بادایرهٔ هادی (D) مماس داخل هستند (ش ٦٦٩) ونقاطی که روی شاخهٔ $[F']$ واقعند مراکز دایره‌هایی میباشند که از F' میگذرند و بادایرهٔ هادی (D) مماس خارج هستند (ش ٦٦٨). اگر نقطهٔ M روی شاخهٔ $[F]$ واقع باشد داریم $MF' - MF = ٢a$ و اگر روی شاخهٔ $[F']$ واقع باشد داریم $MF - MF' = ٢a$

٨٦٠ - فصل‌مشترك هذلولی با یك خط راست - میخواهیم فصل‌مشترك خطراست Δ را باهذلولی که دو کانونش F و F' وشعاع دایرهٔ هادیش $٢a$ میباشد بدست آوریم. برحسب آنکه خط Δ از یکی‌از دو کانون هذلولی بگذرد ویا از هیچیك از دو کانون آن‌نگذرد دوحالت تمیز میدهیم:

حالت‌اول - خط Δ ازیکی‌از کانونهای هذلولی میگذرد- فرض میکنیم خطراست Δ از کانون F بگذرد وفصل مشترکهای خط Δ را بادایرهٔ‌هادی (D) نظیرکانون F نقاط P و P' مینامیم (ش٦٧٢) فصل‌مشترکهای



(ش ٦٧٢)

خط Δ با هذلولی نقاطی از خط Δ هستند که بتوان هریك از آنها را مرکز دایره‌ای اختیار کرد که از کانون F' بگذرد و بادایرهٔ هادی (D) مماس باشد. نقاط تماس این دایره‌ها با دایرهٔ (D) ناچار نقاط P و P'

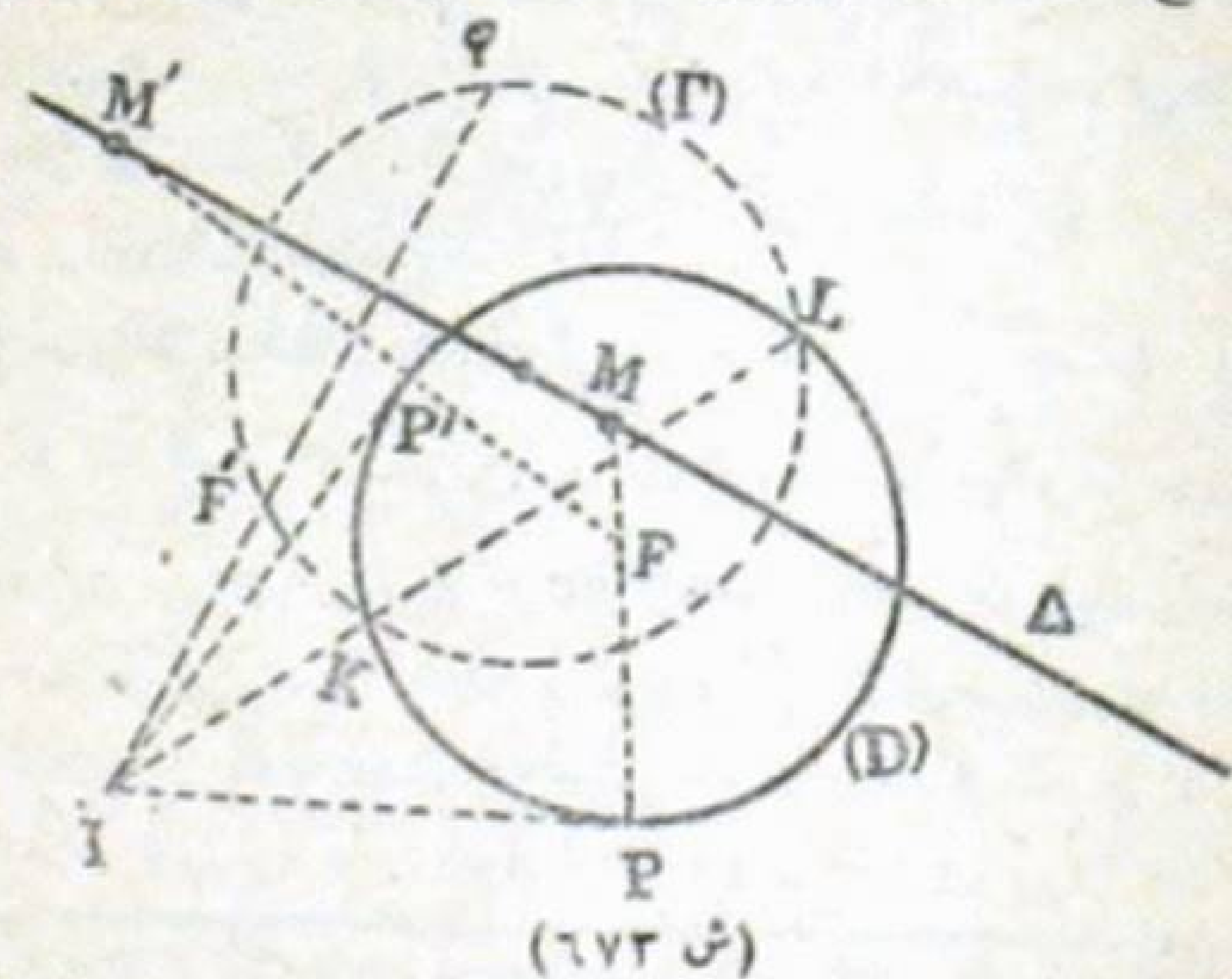
هستند و نقاط تقاطع هذلولی باخط Δ عبارتند از نقاط M و M' فصل مشترکهای Δ با عمودمنصف‌های دوقطعه‌خط $F'P$ و $F'P'$

از آنچه گذشت نتیجه میشود که:

هرخطراست که ازیکی‌از کانونهای هذلولی مثلاًاز کانون F بگذرد هذلولی را در دونقطه قطع میکند باستثنای خطوط راست FH و FH' که از نقاط H و H' میگذرند [H و H' نقاط تماس مماسهایی هستند که از F' بردایرهٔ (D) رسم شوند].

اگر Δ بریکی از خطوط FH و FH'منطبق شود یکی از نقاط فصل‌مشترك Δ با هذلولی روی خط Δ بینهایت دور میشود. برای خاطر نشان کردن این مطلب میگویند که هریك از خطوط راست FH و FH' هذلولی را در یك‌نقطهٔ بفاصلهٔ معین و در یك نقطهٔ واقع در بینهایت دور قطع میکنند.

حالت دوم - خط Δ از هیچیك از کانونهای هذلولی نمیگذرد - قرینهٔ کانون F' را نسبت بخط Δ نقطهٔ φ مینامیم (ش٦٧٣) هردایره که از نقطهٔ F' بگذرد و مرکزش روی‌خط Δ واقع باشد ازنقطهٔ φ نیزخواهد گذشت وبرعکس‌هردایره که ازنقاط F' و φ بگذرد مرکزش روی Δ واقع خواهد بود. پس‌برای تعیین‌فصل‌مشترکهای‌خط Δ باهذلولی



(ش ٦٧٣)

باید مراکز دایره‌هایی را که از نقاط F' و φ میگذرند و بادایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F مماس‌هستند تعیین کنیم. مراکز این‌دایره‌ها نقاط‌تقاطع خط Δ باهذلولی هستند.

این مسئله را درشمارهٔ ۴۷۱ (متمم مقالات سوم وچهارم) حل کرده ودر ذیل شمارهٔ ۸۲۵ در مورد بیضی تکرار کرده‌ایم و در اینجا راه حل آنرا یادآوری میکنیم.

دایره‌ای مانند (Γ) رسم‌میکنیم که مرکزش روی‌خط Δ واقع‌باشد و از نقطهٔ F' بگذرد و دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F را در دو نقطه مانند L و K قطع کند (این دایره از نقطهٔ φ نیز خواهد گذشت) خطوط راست KL و F'φ یکدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع میکنند. از نقطهٔ I مماسهای IP و IP' را بردایرهٔ (D) رسم‌میکنیم. نقاط P و P' نقاط‌تماس دایره‌های مذکور با دایرهٔ هادی (D) میباشند و مراکز این دایره‌ها از طرفی‌روی خط Δ وازطرف‌دیگرروی‌خطوط FP و FP' واقعند. پس اگر فصل‌مشترک FP را با Δ نقطهٔ M و فصل‌مشترک F'P را با Δ نقطهٔ M' بنامیم نقاط M و M' نقاط تقاطع خط با هذلولی هستند.

بحث ـ با استدلالی شبیه آنچه درمورد بیضی گفتیم معلوم‌میشود که اگر نقطهٔ φ درخارج دایرهٔ هادی (D) باشد ولی‌روی هیچیک‌از دومماسی که از نقطهٔ F' بر دایرهٔ هادی رسم میشوند واقع نباشد خط Δ هذلولی را در دونقطه قطع میکند. اگر نقطهٔ φ در داخل دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ باهذلولی نقطهٔ مشترکی ندارد.

اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد ولی بر نقاط H و H' منطبق نباشد* خطΔ باهذلولی فقط دریك نقطه‌مشترك‌است✡ واین‌نقطه عبارتست از فصل‌مشترك Δ با Fφ. در شمارهٔ ۸۶۲ ثابت میکنیم که در اینصورت خط Δ با هذلولی مماس است.

۸۶۱ ـ حالات خاص

الف ـ مجانب‌های هذلولی ـ ممکن است خط Δ بریکی از مماسهایی که از نقطهٔ F' بردایرهٔ هادی (D) رسم میشوند عمود باشد.

مثلا فرض میکنیم خط Δ بر F'H عمود باشد. در اینصورت یکی‌از نقاط تماس مماسهایی که از نقطهٔ I بردایرهٔ (D) رسم‌میشوند مثلا P' بر H منطبق است. و نقطه‌ای از هذلولی که نظیر نقطهٔ H از دایرهٔ هادی (D) میباشد در بینهایت دور روی خط FH و همچنین روی خط L که با

* نقاط H و H' نقاط تماس مماسهایی هستند که از F' بردایرهٔ (D) رسم‌شوند

✡ دراین‌مورد گاهی نیز میگویند که خط Δ باهذلولی دردو نقطه که برهم منطبق هستند مشترک است.

FH موازیست واقع میباشد. نظیر مماس IP نقطهٔ M از هذلولی که در فصل‌مشترک FP و Δ میباشد بدست میآید. در اینحالت خط Δ فقط دریك نقطه که در فاصلهٔ معین واقع است هذلولی را قطع میکند. حال فرض میکنیم که خط Δ بموازات خود حرکت کند و رفته‌رفته بعمودمنصف قطعه‌خط F'H که آنرا خط (a) مینامیم نزدیك و بالاخره بر آن منطبق‌شود (خط a ازمرکزهذلولی میگذرد) در اینصورت نقطهٔ φ بر H منطبق میشود ونقاط I و P نیز بر H منطبق میگردند و نقطهٔ M روی هذلولی بینهایت دورمیشود. بنابراین وقتی Δ بموازات خود حرکت میکند و بر a منطبق میشود M روی هذلولی بینهایت دور میشود و در عین حال فاصله‌اش از خط a بسمت صفر میل میکند. برای‌بیان این‌مطلب میگویند که **خط (a) مجانب‌هذلولی میباشد**. خطراست a' که‌قرینهٔ خط راست a نسبت بمحور کانونی هذلولی میباشد نیز مجانب منحنی‌است بنابراین:

(ش ۳۷۶)

I، ۲، H، P، F'، F، O، M، K، (a')، (a)، Δ

خطوط راست a و a' که از مرکزهذلولی بترتیب بر F'H و F'K عمود شوند مجانبهای هذلولی میباشند.

ب ـ اگر خطراست Δ برمحور کانونی هذلولی عمود باشد برای آنکه نقطهٔ φ در خارج دایرهٔ هادی (D) قرار گیرد یعنی برای آنکه Δ هذلولی‌را قطع کند لازم و کافیست که فصل‌مشترك خط Δ بامحور کانونی مابین رأسهای A و A' واقع نباشد.

نتیجهـ از آنچه گذشت نتیجهٔ زیر بدست میآید:

خط راست Δ راکه با هیچیک‌از مجانب‌های هذلولی موازی نیست درنظر میگیریم:

اولا اگر نقطهٔ φ یعنی قرینهٔ کانون F' نسبت بخط Δ در خارج‌دایرهٔ‌هادی (D) نظیر کانون F واقع‌باشد خط Δ هذلولی را در دونقطهٔ قطع میکند.

ثانیاً اگر نقطهٔ φ در داخل دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ هذلولی را قطع نمیکند.

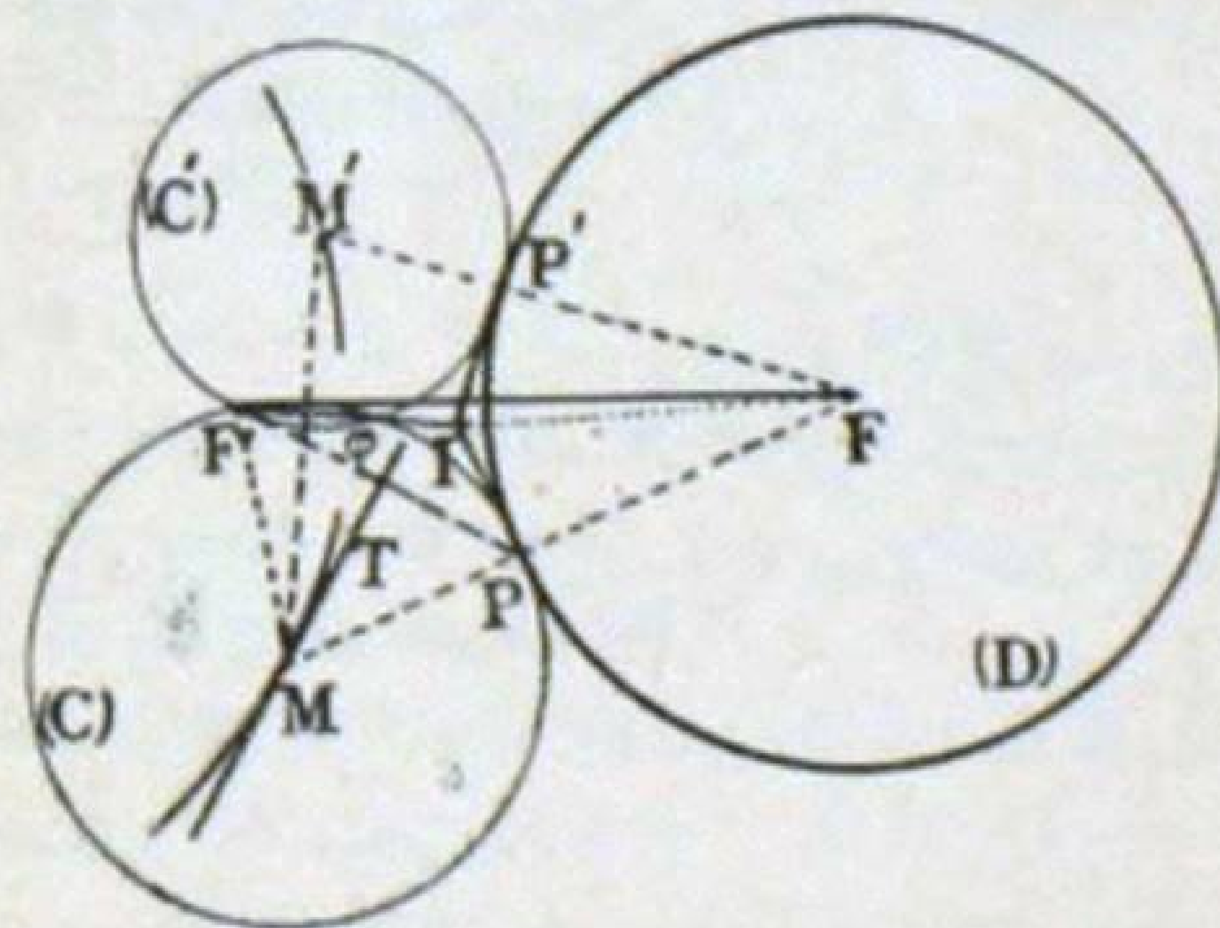
ثالثاً اگر نقطهٔ φ روی دایرهٔ (D) واقع باشد خط Δ فقط در یك نقطه باهذلولی مشترك است.

هرخط راست که بایکی از مجانبهای هذلولی موازی باشد هذلولی را فقط در یك نقطه قطع میکند.

خط مماس برهذلولی در یکی از نقاط آن

٨٦٢ـ همانطور که درمورد بیضی گفتیم (شمارهٔ ٨٢٦) برای تحقیق آنکه دریك نقطه مانند M ازهذلولی خط مماس برهذلولی وجود دارد یانه باید دونقطهٔ مجاور M و M' را روی هذلولی درنظر بگیریم و تحقیق کنیم که گر نقطهٔ M' رفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود خط قاطع MM' بسمت وضع حدی میل میکند یانه.

فرض میکنیم F و F' کانونهای یك هذلولی و (D) دایرهٔ هادی آن هذلولی نظیر کانون F باشد و دونقطهٔ مجاور M و M' را روی یك شاخهٔ این هذلولی درنظر بگیریم (ش ٦٧٥).



(ش ٦٧٥)

میدانیم که دایره‌های (C) و (C') که ازنقطهٔ F' میگذرند ومراکز آنها نقاط M و M' میباشند بادایرهٔ (D) در نقاطی مانند P و P' مماس هستند. این دودایره یکدیگر را در نقطهٔ دیگری مانند φ که قرینهٔ نقطهٔ F' نسبت بخط MM' است قطع میکنند. مراکز اصلی سه دایرهٔ (D) و

(C) و (C') عبارتست از نقطهٔ I فصل‌مشترك $\varphi F'$ باممماسهایی که در نقاط P و P' بردایرهٔ (D) رسم میشوند.

هرگاه نقطهٔ M ثابت بماند و نقطهٔ M' روی هذلولی حرکت کند و رفته‌رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره برآن منطبق شود نقطهٔ P' روی دایرهٔ (D) حرکت‌خواهدکرد ورفته‌رفته بنقطهٔ P نزدیك و بالاخره برآن منطبق‌خواهدشد وخط FI که‌نیمساز زاویهٔ PFP' است برخط FP منطبق خواهد گشت. دراینصورت نقطهٔ I برنقطهٔ P وخط $\varphi F'$ برخط $F'P$ منطبق خواهدشد وخط MM' که همواره عمودمنصف قطعه‌خط $\varphi F'$ میباشد بسمت عمود منصف قطعه‌خط $F'P$ که آنرا T مینامیم میل خواهد کرد پس خط T درنقطهٔ M برهذلولی مماس است.

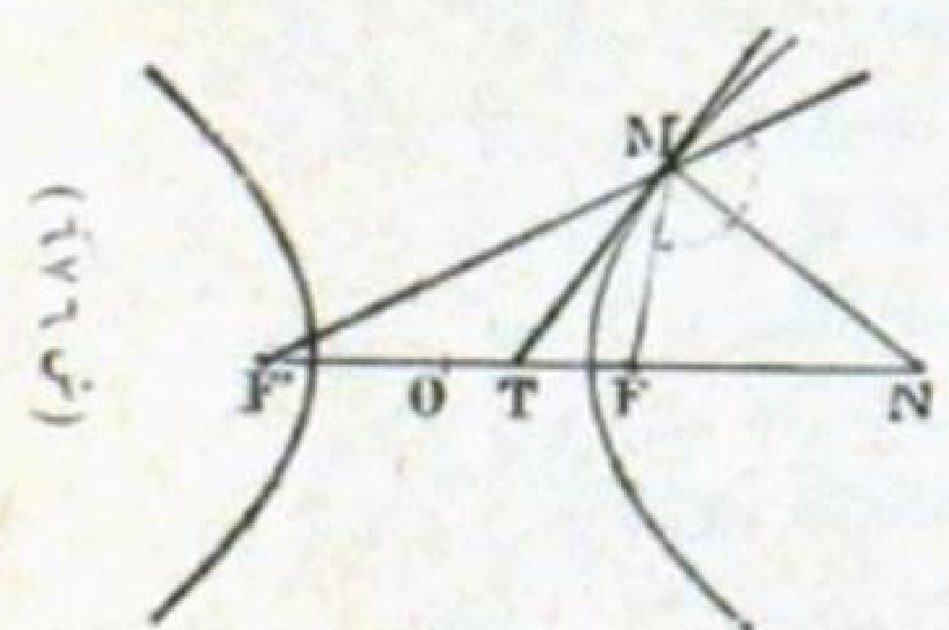
این نکته شایستهٔ دقت‌است که خط مماس MT خط نیمساز زاویهٔ دو شعاع حامل نقطهٔ M یعنی نیمساز زاویهٔ FMF' میباشد (ش ٦٧٥)

از آنچه گذشت نتیجه میشود که:

قضیه - درهرنقطه مانند M از هذلولی یك‌خط مماس بر هذلولی وجود دارد و این خط مماس خط نیمساز زاویهٔ دو شعاع حامل نقطهٔ M میباشد.

اگر نقطهٔ M بریکی از رأسهای هذلولی منطبق باشد مماس در آن نقطه برهذلولی برمحور کانونی عمود است.

٨٦٣ - تبصره - طریقهٔ ترسیم هذلولی بوسیلهٔ نقطه‌یابی که در شمارهٔ ٨٥٩ شرح دادیم دارای این خاصیت جالب توجه است که عمود منصف قطعه‌خط $F'P$ که‌ازتقاطع آن باامتداد شعاع FP متعلق بدایرهٔ هادی (D) نقطهٔ M از هذلولی بدست میآید خودش خط مماس برهذلولی درنقطهٔ M میباشد.



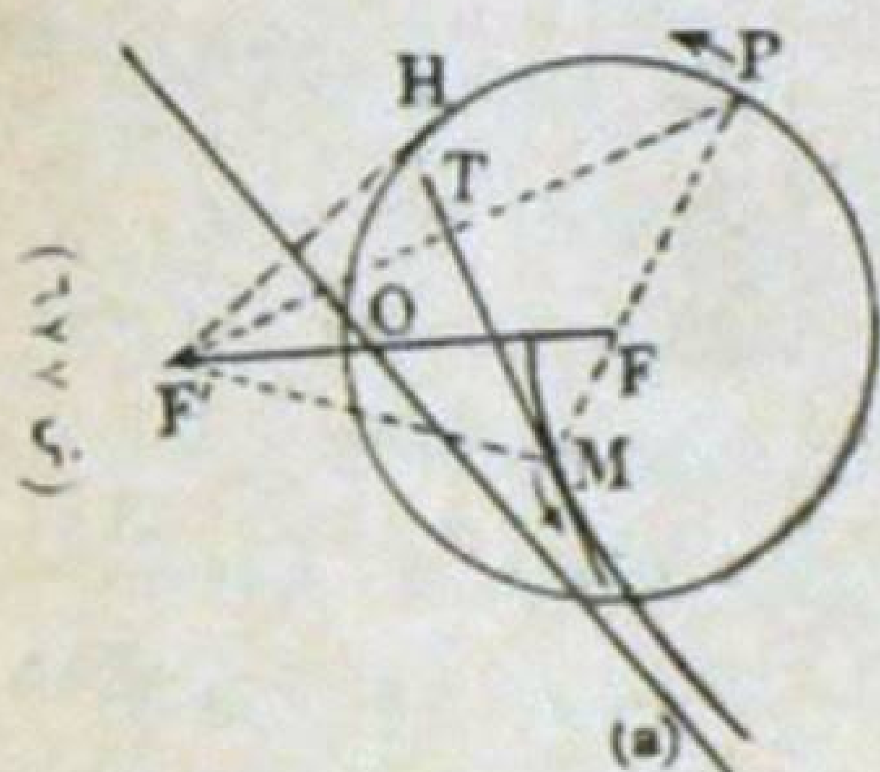
(ش ٦٧٦)

٨٦٤ - قائم برهذلولی - خط قائم بر هذلولی دریکی از نقاط آن مانند M عبارتست از خط راستی که در نقطهٔ M برمماس MT عمود

شود (ش ٦٧٦) واضح است که خط قائم بر هذلولی در نقطهٔ M نیمساز زاویه‌ایست که از یکی از دوشعاع حامل نقطهٔ M و امتداد شعاع حامل دیگر آن پدید میآید.

تمرین - تمرین‌هایی را که در ذیل شمارهٔ ۸۲۸ (صفحهٔ ۱۰) در مورد بیضی ذکر کرده‌ایم درمورد هذلولی بیان وثابت کنید.

۸٦٥ - حد اوضاع خط مماسی که نقطهٔ تماس آن روی هذلولی بینهایت‌دور شود. - اگر نقطهٔ P روی دایرهٔ هادی (D) رفته رفته بنقطهٔ H ✡ نزدیك وبر آن منطبق‌شود نقطهٔ M روی‌هذلولی بینهایت دور میشود وخط مماس MT بسمت عمود منصف قطعه خط $F'H$ یعنی بسمت مجانب (a) میل میکند پس: هریك از دو مجانب هذلولی را میتوان وضع نهایی خط مماسی دانست که نقطهٔ تماس روی هذلولی بینهایت دورشود.



(ش ٦٧٧)

خاصیت‌های خط مماس برهذلولی

۸٦٦ - درشکل ٦٧٥ دیده میشود که نقطهٔ P از دایرهٔ هادی نظیر کانون F عبارتست از قرینهٔ کانون F' نسبت بخط مماس MT برعکس قرینهٔ کانون F' را نسبت بیك خط راست مانند T نقطهٔ P مینامیم. اگر نقطهٔ P روی دایرهٔهادی نظیر کانون F واقع باشد امتدادشعاع FP خط T را درنقطه‌ای‌مانند M قطع‌میکند. نقطهٔ M روی هذلولی‌است (شمارهٔ ۸۵۹). و خط T درنقطهٔ M برهذلولی مماس‌است (شمارهٔ ۸٦۲) واز مطالب فوق قضیهٔ زیر بدست میآید:

قضیهٔ ۱ - برای آنکه یك‌خط راست با یك هذلولی مماس باشد لازم و کافیست که قرینهٔ یکی از دو کانون هذلولی نسبت بآن‌خط روی دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر واقع باشد.

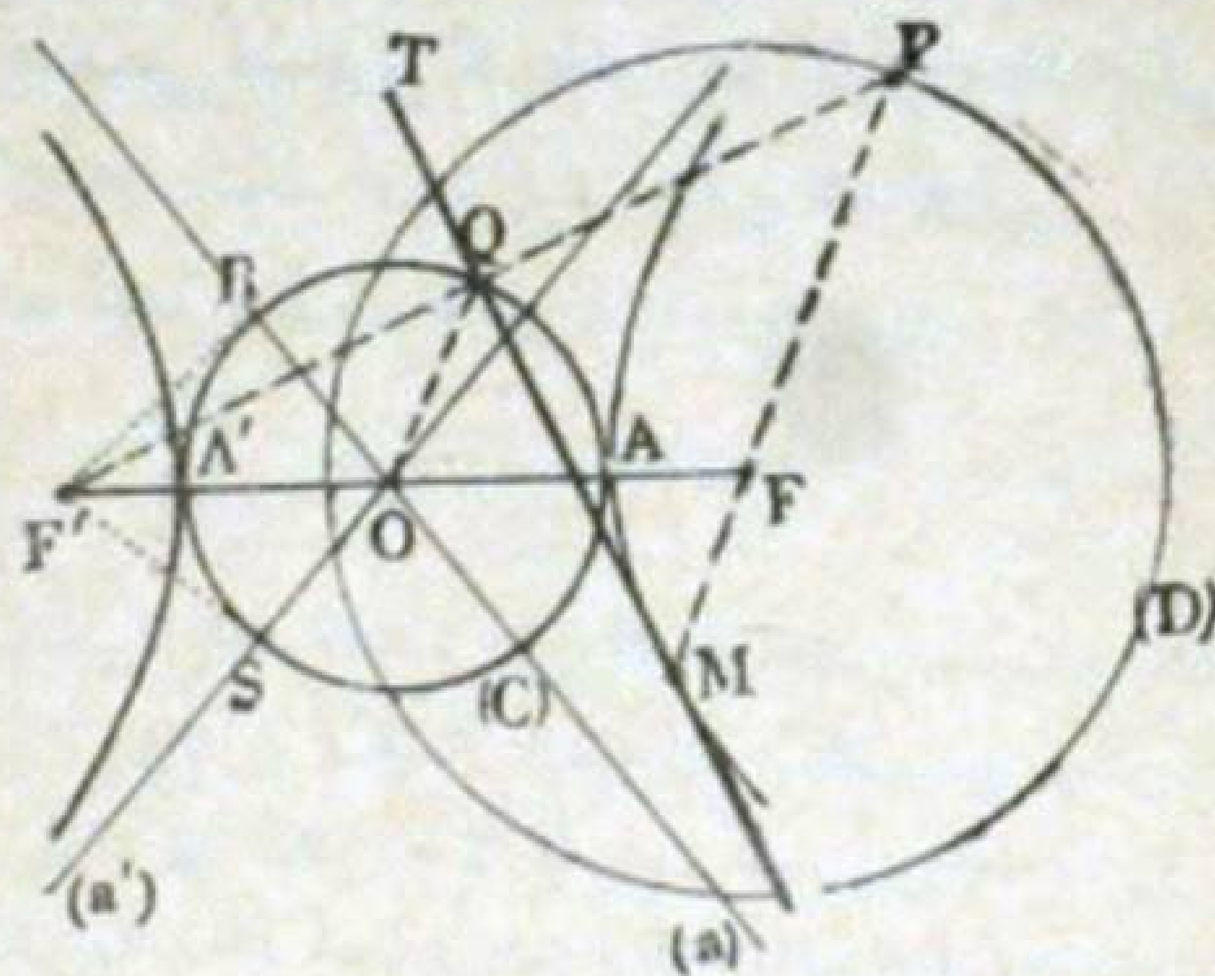
✡ نقطهٔ H نقطهٔ تماس مماسی است که از نقطهٔ F' بر دایرهٔ هادی (D) رسم شود.

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد.

مکان هندسی قرینه‌های یکی از دو کانون هذلولی نسبت بخطوط مماس بر آن عبارتست ازدایرهٔهادی نظیر کانون دیگر.

۸٦۷ - نتیجه - عمودمنصف‌های قطعه‌خطهاییکه نقاط مختلف یك دایره را بیك نقطهٔ ثابت واقع در خارج آن دایره وصل میکنند همگی بریك‌هذلولی مماسند. دایرهٔمزبور یکی‌ازدوایر هادی این هذلولی ونقطهٔ ثابت مذکور کانون دیگر این هذلولی میباشد.

۸٦۸ - دایرهٔاصلی هذلولی - تصویر کانون F' روی‌مماس MT عبارتست از نقطهٔ Q وسط قطعه‌خط $F'P$ و اگر وسط قطعه‌خط $F'F$ یعنی



(ش ٦٧۸)

مرکز هذلولی را O بنامیم (ش ٦٧۸) و O را به Q وصل کنیم قطعه خط OQ که اوساط دوضلع ازمثلث $F'PF$ را بهم وصل‌میکند مساوی‌با نصف ضلع FP میباشد و چون $FP = ۲a$ پس $OQ = a$ و نظر باینکه نقطهٔ O ثابت است وقتی نقطهٔ M روی هذلولی ونقطهٔ P روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F حرکت کند نقطهٔ Q روی دایرهٔ (C) که مرکزش O و شعاعش a است تغییر مکان میدهد. دایرهٔ (C) را **دایرهٔاصلی هذلولی** مینامند. محور کانونی‌هذلولی یعنی $A'A$ یکی‌ازقطرهای‌این‌دایره میباشد.

برعکس اگر نقطهٔ Q یکی‌از نقاط دایرهٔ اصلی هذلولی باشد واز نقطهٔ Q عمود QT را بر خط $F'Q$ اخراج کنیم و قرینهٔ F' را نسبت بخط QT نقطهٔ P بنامیم واضح‌است که $FP = ۲a$ یعنی‌نقطهٔ P روی دایرهٔهادی

نظیر کانون F واقع میباشد پس خط QT برهذلولی مماس است.

واضح‌است که عین استدلال فوق را میتوان در بارهٔ تصویر کانون F برمماس MT تکرار کرد. دراین‌مورد بایدبجای دایرهٔ هادی نظیر کانون F دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را درنظر بگیریم.

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر حاصل میشود :

قضیهٔ ۲ - برای آنکه یك‌خط راست با یك هذلولی مماس باشد لازم و کافیست که تصویر یکی‌از دو کانون هذلولی برآن خط متعلق بدایرهٔ اصلی هذلولی باشد.

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد :

مکان‌هندسی‌تصاویر هریك‌ازدو کانون هذلولی برخطوط مماس برآن عبارتست از دایرهٔ اصلی هذلولی.

۸۶۹ - تبصره - در شکل ۶۷۸ واضح است که :

$\frac{\overline{F'F}}{F'O} = \frac{F'P}{\overline{F'Q}} = ۲$ یعنی دایرهٔ هادی (D) در تجانسی که مرکزش نقطهٔ F' و نسبتش۲ باشد مجانس‌دایرهٔ‌اصلی‌است. بنابراین‌مماسهای مشترك خارجی دودایرهٔ (D) و (C) از نقطهٔ F' میگذرند. بعبارت دیگر اگر از F' مماس F'R را بردایرهٔ (C) رسم کنیم این‌خط‌مماس بردایرهٔ (D) نیز در نقطه‌ای مانند H مماس است و نقطهٔ R وسط قطعه‌خط F'H میباشد ونظر بآنچه درشمارهٔ(۸۶۲)دربارهٔ مجانبهای هذلولی گفتیم معلوم میشود که خط راست OR که‌آنرا خط (a) مینامیم یکی‌از مجانبهای هذلولی‌است بنابراین:

برای تعیین مجانبهای هذلولی بکمك دایرهٔ اصلی آن کافیست ازیکی‌از دو کانون هذلولی مثلا از F' دومماس F'R و F'S را بر دایرهٔ اصلی رسم کنیم. خطوط راست OR و OS مجانبهای هذلولی هستند.

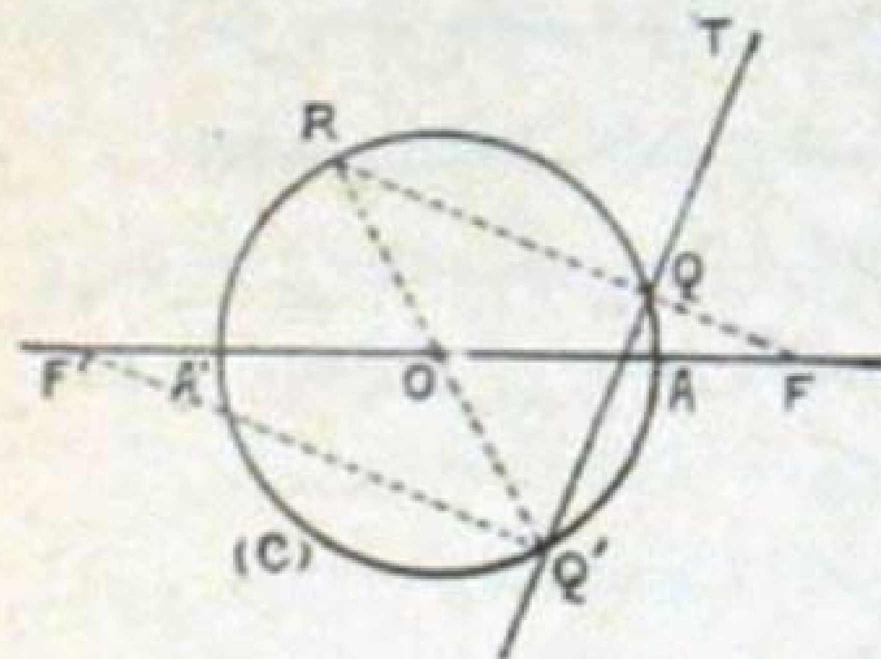
۸۷۰ - نتیجـهٔ قضیهٔ ۲ - اگر زاویهٔ قائمه‌ای در صفحهٔ خود چنان‌تغییر مکان‌دهد که رأسش همواره روی دایرهٔ ثابتی حرکت کند ویك ضلعش همواره از نقطهٔ ثابتی واقع در خارج دایرهٔ مزبور بگذرد محمل

ضلع دیگرش✲ بریك‌هذلولی که نقطهٔ ثابت مزبور یك کانون آن ودایرهٔ مزبور دایرهٔ اصلی آنست همواره مماس میباشد.

تمرین - درشکل ۶۷۸ تحقیق کنید که وقتی نقطهٔ Q روی کمان $\overset{\frown}{RAS}$ از دایرهٔ اصلی حرکت کند خط‌راست QT که از نقطهٔ Q برخط F'Q عمود میشود بر شاخهٔ [F] از هذلولی مماس میباشد و اگر نقطهٔ Q روی کمان $\overset{\frown}{RA'S}$ از دایرهٔ اصلی حرکت کند خط QT بر شاخهٔ [F'] مماس میباشد و اگر نقطهٔ Q بر نقطهٔ R یا S منطبق شود خط QT بر مجانب (a) و یا (a') منطبق خواهد شد.

۸۷۱ - قضیهٔ۳ - حاصلضرب‌فواصل دو کانون هر هذلولی از یکی‌از خطوط مماس برآن مساویست‌با مقدار ثابت c^2-a^2

اگر خط T برهذلولی مماس باشد و تصاویر دو کانون F و F' را روی خط مماس T بترتیب‌نقاط Q و Q' بنامیم (ش ۶۷۹) نقاط Q و Q' روی دایرهٔ اصلی هذلولی واقع هستند (شمارهٔ ۸۶۸) و اگر دومین فصل مشترك خط FQ را با دایرهٔ اصلی نقطهٔ R بنامیم چون زاویهٔ Q'QR قائمه‌است خط Q'R یکی‌ازقطرهای دایرهٔ اصلی میباشد و از تساوی دو مثلث OFR و OF'Q' نتیجه‌میشود F'Q' = FR و مطابق شکل نظر بقضیهٔ ۳۱۶ (مقالهٔ سوم) داریم:



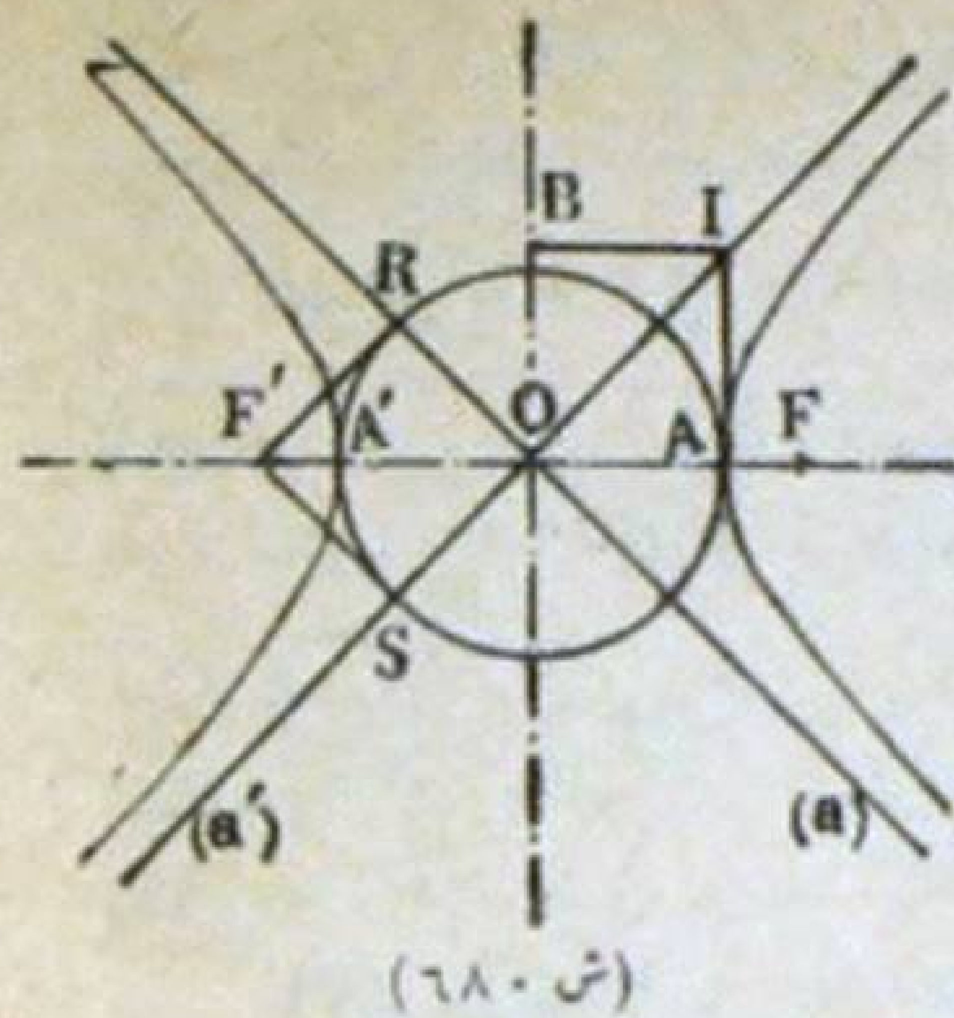
(ش ۶۷۹)

$$FQ \times FR = FA \times FA' = (c-a)(c+a) = c^2 - a^2$$

بقرینهٔ آنچه درمورد بیضی گفتیم درموردهذلولی مقدارثابت c^2-a^2 را b^2 مینامند.

۸۷۲ - تبصره - درشکل ۶۷۸ دیده‌میشود که طول F'R یعنی‌فاصلهٔ کانون F' ازمجانب a مساویست با $\sqrt{c^2-a^2}$ (زیرا $\overline{F'R}^2 = \overline{F'O}^2 - \overline{OR}^2$) پس فاصلهٔ هریك از دو کانون هذلولی از هریك از مجانبهای آن مساویست‌با b

✲ مقصود خط راستی‌است که ضلع دیگر زاویه‌روی آن واقع است.



(ش ۶۸۰)

اگر از رأس A عمودی برمحور کانونی هذلولی رسم کنیم و فصل مشترك آنرا با یکی از مجانبها نقطهٔ I بنامیم (ش ۶۸۰) مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OAI و ORF′ متساویند و داریم :

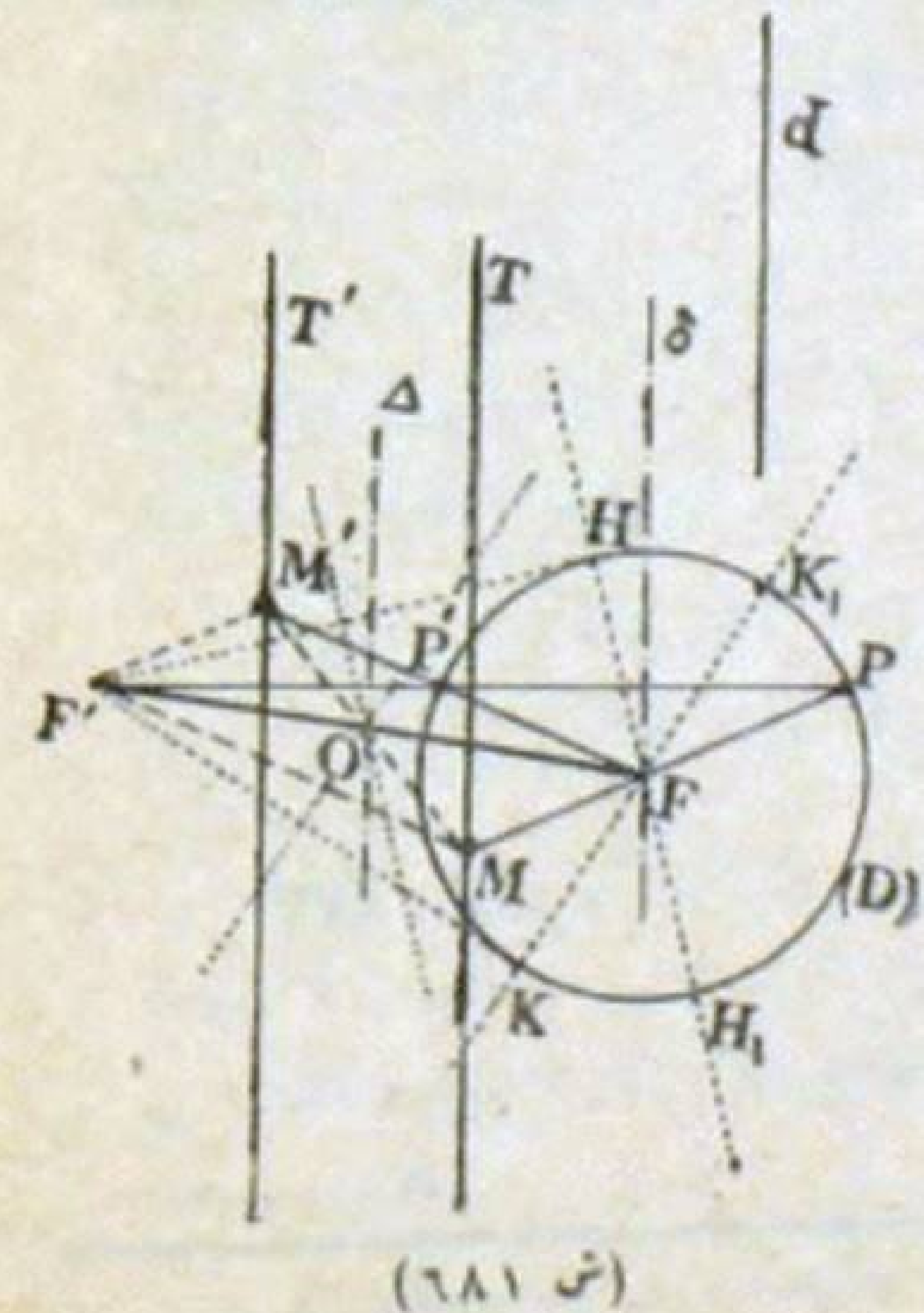
$$OI = c \quad \text{و} \quad AI = b$$

و مشاهده میشود که اگر روی‌محور غیر قاطع هذلولی طول OB را مساوی با b جدا کنیم مجانب (a′) از دورأس متقابل O و I ازمستطیل OAIB میگذرد.

اگر a و b متساوی باشند دو مجانب هذلولی برهم عمودند و در اینصورت هذلولی را **متساوی‌القطرین** مینامند.

مسائل مربوط بخط مماس برهذلولی

۸۷۳- مسئلهٔ ۱- خطراست d در صفحهٔ یك هذلولی مفروض است میخواهیم خط مماسی بموازات خط d برهذلولی رسم کنیم.



(ش ۶۸۱)

فرض میکنیم F و F′ دو کانون هذلولی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ۶۸۱) قرینهٔ کانون F′ نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ ۸۶۶) و از طرف دیگر روی عمود مرسوم از نقطهٔ F′ برخط d واقع است (زیرا مماس مطلوب باخط d موازیست). بنابراین اگر از نقطهٔ F′ خطی بر d عمود کنیم و فصل مشترکهای آنرا با

دایرهٔ (D) نقاط P و P′ بنامیم عمود منصف‌های دوقطعه‌خط F′P و F′P′ یعنی دو خط T و T′ مماسهای مطلوب میباشند. نقاط تماس M و M′ عبارتند از فصل‌مشترکهای دومماس T و T′ باخطوط راست FP و FP′

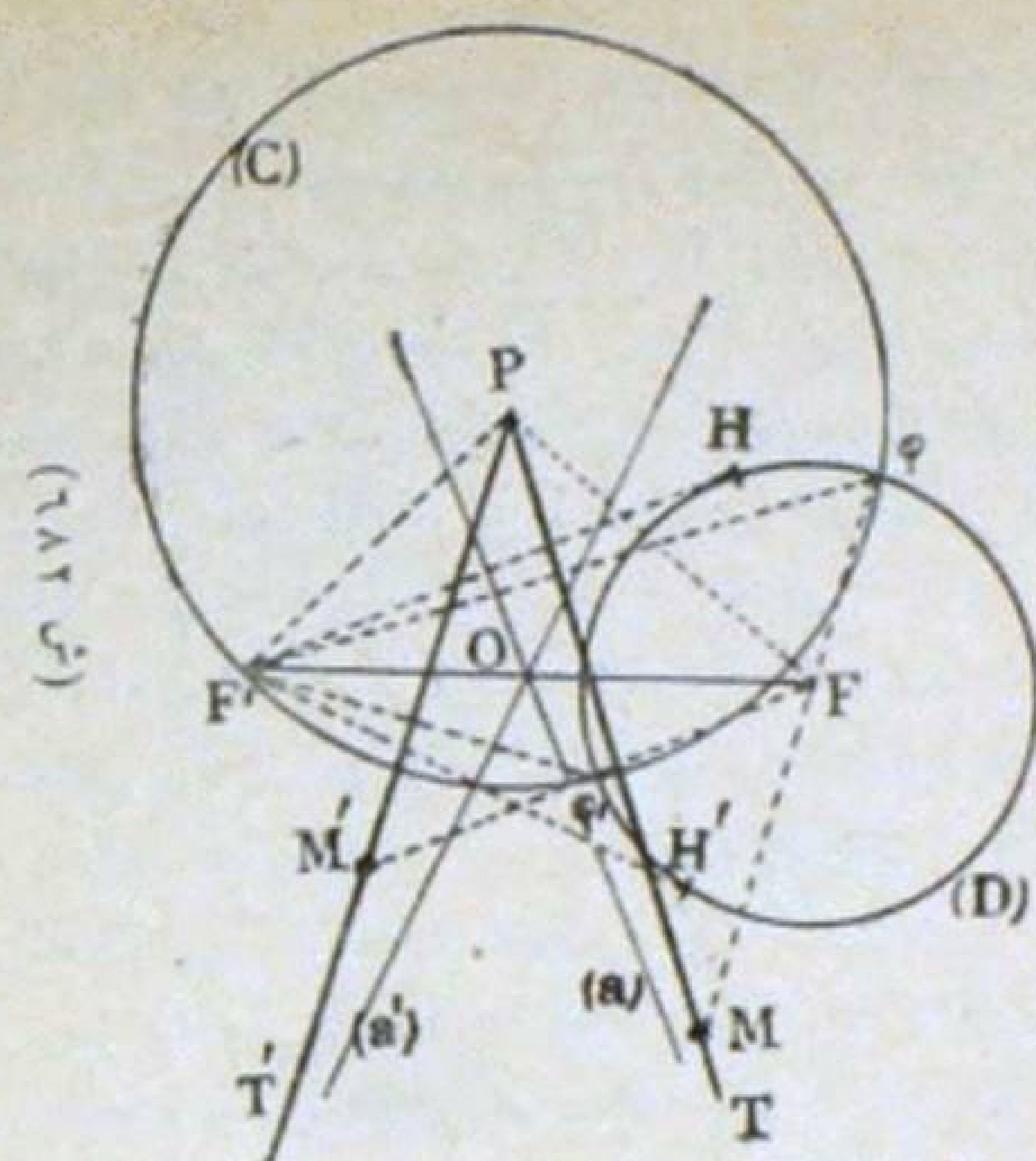
بحث - خطی که ازنقطهٔ F′ برخط d عمودمیشود درصورتی دایرهٔ (D) را قطع میکند که این خط در زاویهٔ محدب HF′K و زاویهٔ متقابل برأس آنها واقع باشد [H و K نقاط تماس مماسهایی هستند که از F′ بردایرهٔ (D) رسم شده‌اند] پس اگر از F خط Fδ را بموازات d رسم کنیم برای آنکه مسئله جواب‌داشته‌باشد باید Fδ در زاویهٔ محدب HFK_1 و زاویهٔ متقابل برأس آن قرار داشته باشد. اکنون ملاحظه میکنیم که اگر هردو مجانب هذلولی را بموازات خود طوری انتقال دهیم که نقطهٔ O (مرکز هذلولی) برنقطهٔ F منطبق شود زاویه‌هایی از دو مجانب که شامل کانونهای هذلولی نیستند برزاویهٔ HFK_1 ومتقابل برأس آن منطبق میشوند و نتیجه میگیریم که برای آنکه مسئله دو جواب داشته باشد باید OΔ که از مرکز هذلولی بموازات خط مفروض d رسم میشود در آن دو زاویه‌ای از زوایای دومجانب واقع شود که شامل کانونهای هذلولی نیستند (تحقیق کنید که دراینصورت خط OΔ هذلولی را قطع نخواهد کرد).

درحالت خاصی که خط d با یکی‌از مجانبهای هذلولی موازی باشد این مجانب تنها جواب مسئله است و نقطهٔ تماس آن در بینهایت دور واقع میباشد.

۸۷۴ - تبصره - دو مثلث PMF′ و PFP′ متساوی‌الساقین هستند (ش۶۸۱) بنابراین‌خطوط MF′ و FP′ باهم موازی میباشند و بهمین‌دلیل خطوط M′F′ و FP نیزمتوازیند‌بس‌چهارضلعی MF′M′F متوازی‌الاضلاع است و بنابراین نقاط M و M′ نسبت بنقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند.

۸۷۵ - مسئلهٔ ۲ - میخواهیم از نقطهٔ معلوم P واقع در صفحهٔ یك‌هذلولی مماسی برآن هذلولی رسم کنیم.

فرض میکنیم F و F′ دو کانون هذلولی و (D) دایرهٔ هادی نظیر کانون F باشد (ش ۶۸۲) قرینهٔ کانون F′ نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی دایرهٔ هادی (D) نظیر کانون F (شمارهٔ ۸۶۶) وازطرف‌دیگر روی دایرهٔ (C) که مرکزش P وشعاعش PF′ باشد واقع است. زیرا دو نقطه که نسبت بخط مماس مطلوب قرینهٔ یکدیگر باشند از هرنقطهٔ واقع براین خط مماس واز جمله ازنقطهٔ P بیك‌فاصله واقعند.



اگر دایرهٔ (C) دایرهٔ هادی (D) را در نقاط φ و φ' قطع کند میتوان از نقطهٔ P دومماس برهذلولی رسم کرد و در اینصورت میگویند **نقطهٔ P در خارج هذلولی واقع است** . این دو مماس عبارتند از عمودمنصف‌های قطعه‌خطهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ ونقاط تماس آنها M و M' بترتیب روی خطهای راست $F\varphi$ و $F\varphi'$ واقعند.

اگردایرهٔ (C) بادایرهٔهادی (D) مماس‌باشد نقطهٔ P روی هذلولی واقع است (شمارهٔ ۸۵۸) و مسئله یك جواب دارد که همان مماسی است که میتوان درنقطهٔ P واقع برهذلولی برآن رسم کرد.

اگر دو دایرهٔ (C) و (D) نقطهٔ مشترکی نداشته باشند نمیتوان از نقطهٔ P مماسی برهذلولی رسم کرد و دراینصورت میگویند **نقطهٔ P در داخل هذلولی واقع است.**

۸۷۶ ـ شرط آنکه نقطه‌ای مانند P درخارج یك‌هذلولی واقع باشد ـ برای آنکه نقطهٔ P درخارج هذلولی واقع باشد یعنی بتوانیم از P دومماس برهذلولی رسم کنیم لازم و کافیست که دوایر (C) و (D) متقاطع باشند (ش۶۸۲) وبرای آنکه دوایر (C) و (D) متقاطع باشند لازم و کافیست که بتوانیم مثلثی بسازیم که اضلاع آن مساوی با قطعه‌خطهای PF (خط‌المرکزین دو دایره) و PF' و ۲a (شعاعهای دودایره) باشند وبرای این لازم و کافیست که طول یکی‌ازاین سه قطعه‌خط از مجموع دو قطعه‌خط

دیگر کوچکتر و ازتفاضل آنها بزرگتر باشد. بنابراین شرط تقاطع دو دایرهٔ مزبور را میتوان چنین نوشت :

$$|PF - PF'| < 2a < PF + PF'$$

اما نامساوی $PF+PF'>2a$ همواره برقرار است زیرا اگرنقطهٔ P روی محور کانونی واقع نباشد ویا روی محور کانونی ولی در خارج قطعه‌خط FF' واقع باشد داریم $PF+PF'>2c$ و اگر P روی قطعه‌خط FF' واقع باشد داریم $PF+PF'=2c$ پس درهرصورت نامساوی $PF+PF'>2a$ برقرار است (زیرا $2c>2a$)

بنابراین شرط لازم وکافی برای آنکه بتوانیم ازنقطهٔ P دومماس برهذلولی رسم کنیم اینست که داشته باشیم :

$$\boxed{|PF-PF'|<2a}$$

۸۷۷ ـ تبصره ـ اگر نقطهٔ P روی یکی از دو مجانب هذلولی واقع باشد یکی‌از نقاط φ و φ' بر یکی‌از نقاط H و H' یعنی‌نقاط تماس مماسهایی که از F' بردایرهٔ (D) رسم میشوند واقع خواهدبود (ش۶۸۲) ودر اینصورت یکی‌از مماسهای مطلوب همان‌خط مجانبی است که نقطهٔ P روی آن واقع است و نقطهٔ تماسش در بینهایت دور میباشد.

اگر نقطهٔ P برمرکز هذلولی واقع‌باشد دومماس مطلوب عبارتند از مجانبهای هذلولی .

۸۷۸ ـ قضایای‌پونسله ـ اگر ازنقطهٔ P واقع‌درخارج یك‌هذلولی دوخط مماس بر آن‌هذلولی رسم‌کنیم ونقاط‌تماس‌را M و M' وکانونهای هذلولی را F و F' بنامیم .

اولا خط راستی که از نقطهٔ P و از یکی از دو کانون هذلولی مثلا از کانون F میگذرد یکی از خطوط نیمساز☆ زوایای دوخط FM و FM' است ثانیاً خطوط مماس☆☆ نسبت بخط نیمساز زاویهٔ FPF' قرینهٔ یکدیگرند.

☆ از تقاطع خطوط FM و FM' چهار زاویه پدیدمیآیدکه چهارنیمساز آنها دوخط‌راست عمودبرهم تشکیل میدهند این دوخط را خطوط نیمساز زوایای دوخط FM و FM' مینامیم.

☆☆ مقصود خطوط راست نامحدود PM و PM' است.

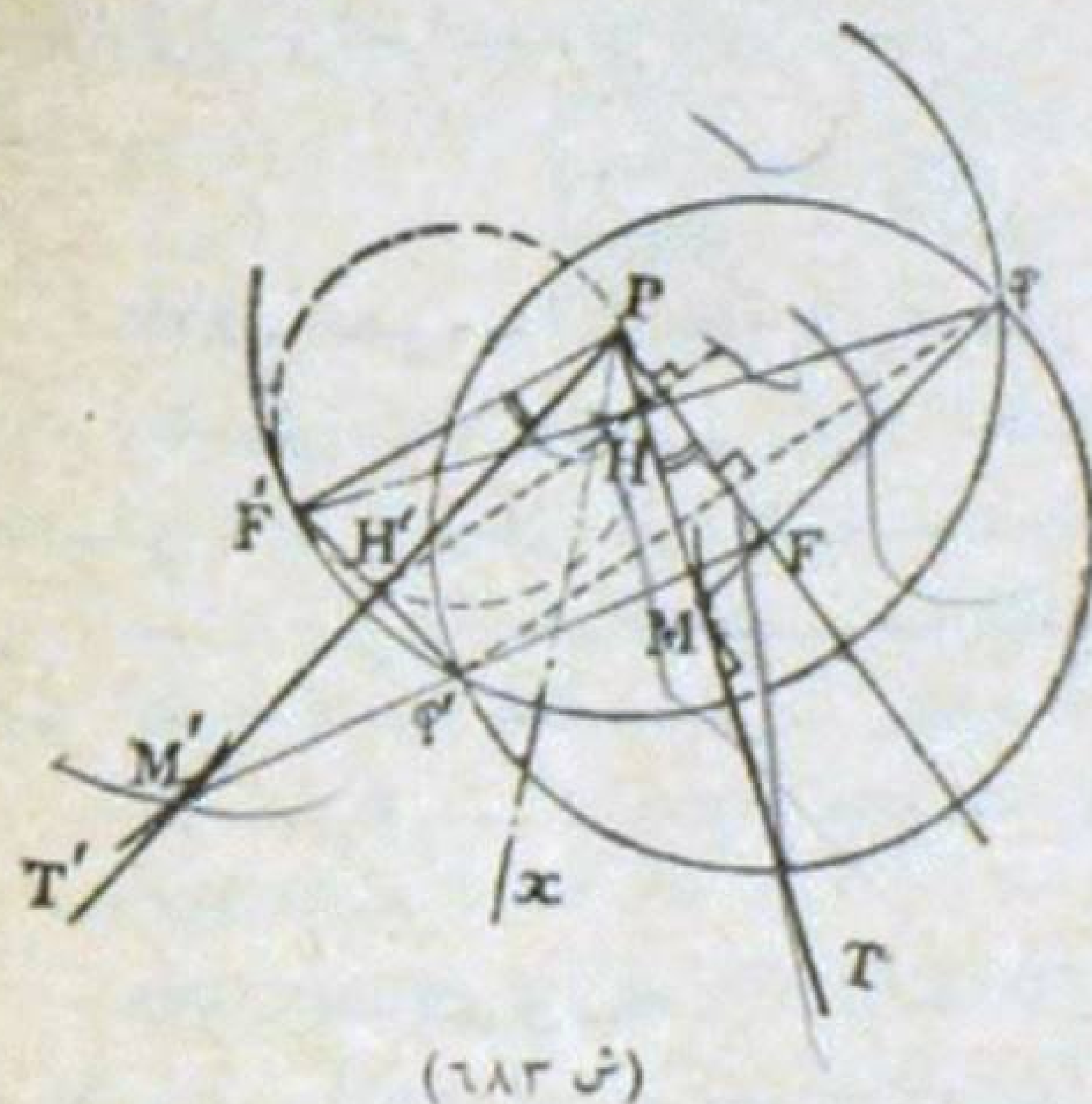
اولا شکلی را که درشمارهٔ ۸۷۵ برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم درنظرمیگیریم (ش۶۸۳) نقاط φ و φ' یعنی فصل‌مشترکهای دودایرهٔ (C) و (D) نسبت بخط PF که خط‌المرکزین دودایرهٔ مزبوراست قرینهٔ یکدیگرند بنابراین داریم:

$$\widehat{\varphi' FP} = \widehat{PF\varphi}$$

اما نقطهٔ M روی خط راست $F\varphi$ و نقطهٔ M' روی خط راست $F\varphi'$ واقع‌است پس خط FP یکی‌از خطوط نیمساز زوایای دوخط FM و FM' است.

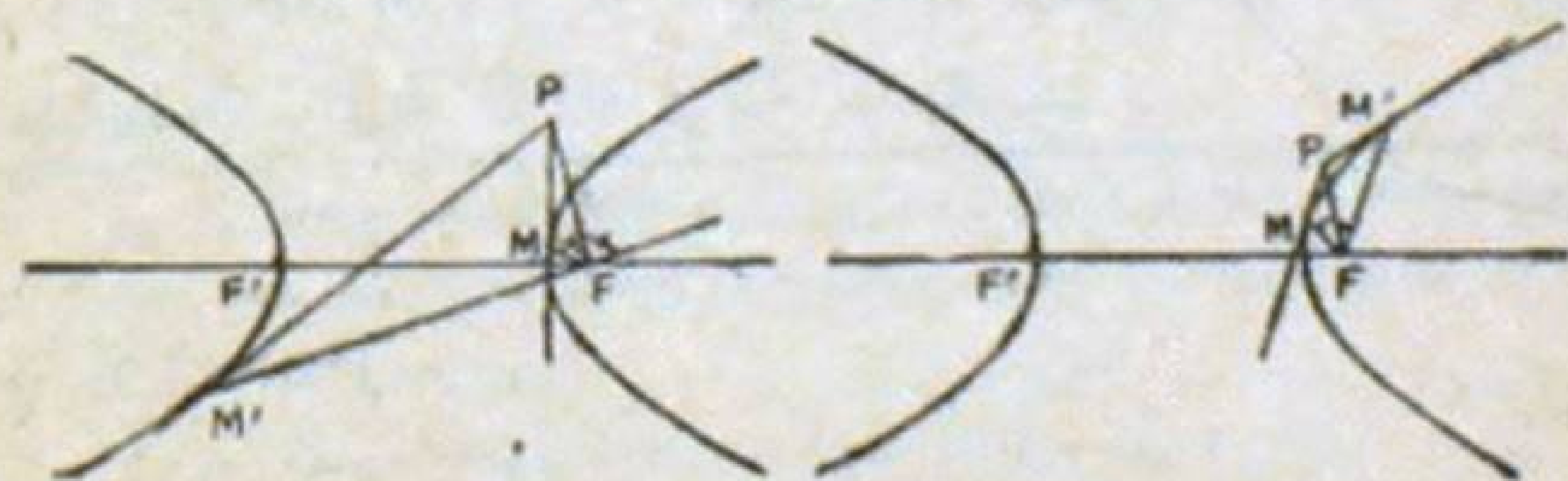
واضح‌است که همین خاصیت‌رامیتوان‌بهمین طریق درمورد کانون F' ثابت کرد و برای این باید بجای دایرهٔ (D) دایرهٔ هادی‌نظیر کانون F' را در نظر گرفت☆

ثانیاً تصاویر F' روی دومماس که آنها را H و H' مینامیم روی دایرهٔ بقطر PF' واقع هستند (ش ۶۸۳)



(ش ۶۸۳)

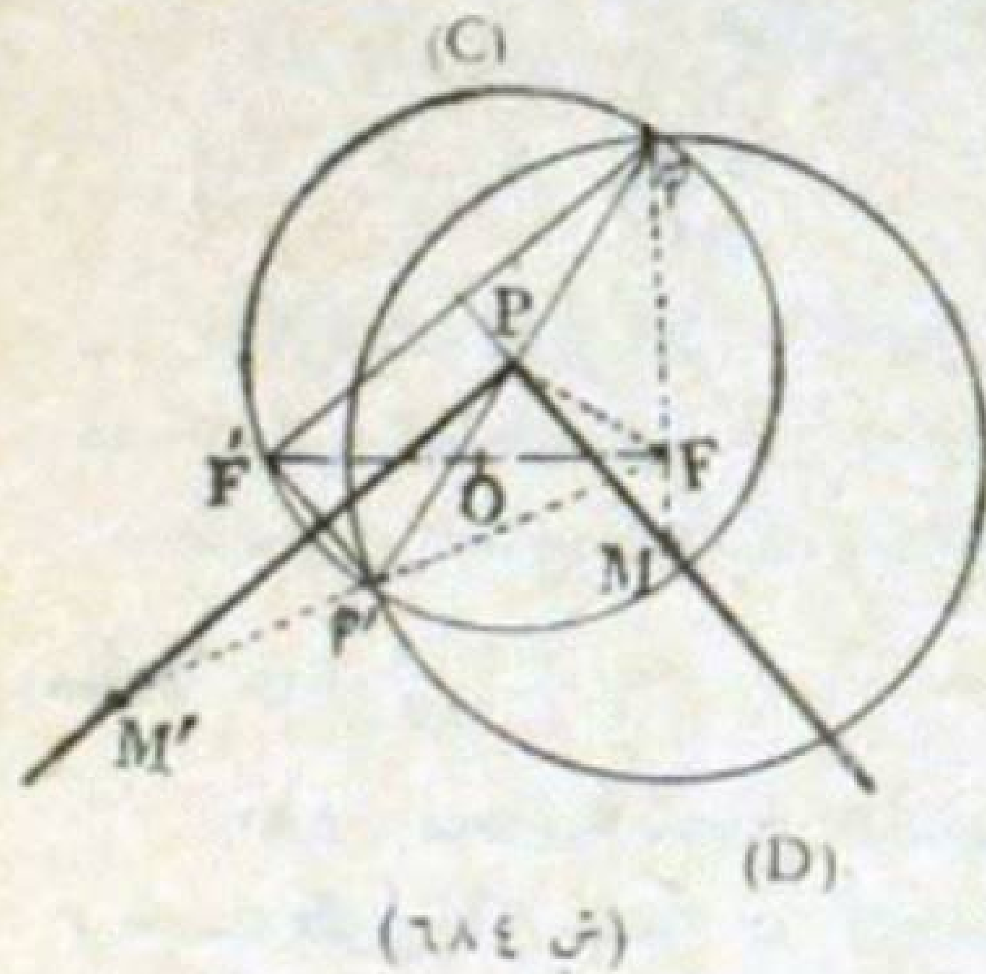
☆ **تبصره** - میتوان تحقیق کرد که اگر نقاط تماس M و M' هردو روی شاخهٔ [F] از هذلولی واقع باشند خط FP خط نیمساز زاویهٔ محدب MFM' است و اگر نقاط تماس روی دوشاخهٔ هذلولی واقع باشند خط FP خط نیمساز زاویهٔ مکمل ومجاور زاویهٔ MFM' میباشد.



و چون نقاط H و H' بترتیب در وسط قطعه خطهای $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ قرار دارند دوخط HH' و $\varphi\varphi'$ باهم موازیند و چون خط‌المرکزین PF بروتر مشترک $\varphi\varphi'$ عموداست پس PF بر HH' نیز عمود میباشد.

بنابراین در مثلث PHH' ارتفاع نظیر ضلع HH' بر PF منطبق است و قطر دایرهٔ محیطی این مثلث PF' میباشد و میدانیم (بتبصرهٔ ذیل شمارهٔ ۸۳۸ رجوع کنید) که نیمساز زاویهٔ HPH' برنیمساز زاویهٔ FPF' منطبق است پس خطوط مماس PT و PT' نسبت‌بخط‌نیمساز زاویهٔ FPF' که آنرا Px مینامیم قرینهٔ یکدیگرند.

۸۷۹ - مکان هندسی نقاطی که میتوان از آنها دو مماس عمودبرهم بریك‌هذلولی رسم کرد - شکلی‌را که برای‌ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش ۶۸۴) از روی این شکل واضح است که برای‌آنکه مماسهای PM و PM' برهم عمود باشند لازم و کافیست که‌خطوط $F'\varphi$ و $F'\varphi'$ که برمماسهای مزبور عمودند بریکدیگر عمود باشند و برای این لازم و کافیست که خط راست $\varphi\varphi'$ ازمرکز دایره یعنی از نقطهٔ P بگذرد. چون خط $\varphi\varphi'$ محور اصلی دو دایرهٔ (C) و (D) است برای آنکه خط $\varphi\varphi'$ از نقطهٔ P بگذرد لازم و کافیست که نقطهٔ P نسبت بدو دایرهٔ (C) و (D) دارای یك‌قوت مشترك‌باشد یعنی لازم و کافیست که داشته باشیم:



(ش ۶۸۴)

$$-\overline{PF'}^2 = \overline{PF}^2 - 4a^2$$

[مقدار سمت راست تساوی فوق قوت نقطهٔ P نسبت بدایرهٔ (D) و مقدار سمت چپ آن قوت نقطهٔ P نسبت‌بدایرهٔ C است]

از تساوی فوق نتیجه میشود:

$$PF^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2 \qquad (1)$$

واگر مرکز هذلولی یعنی وسط‌قطعه‌خط FF' را O بنامیم درمثلث PFF' که PO یکی‌از میانه‌های آنست میتوان نوشت:

$$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=2\overline{OP}^2+2c^2$$

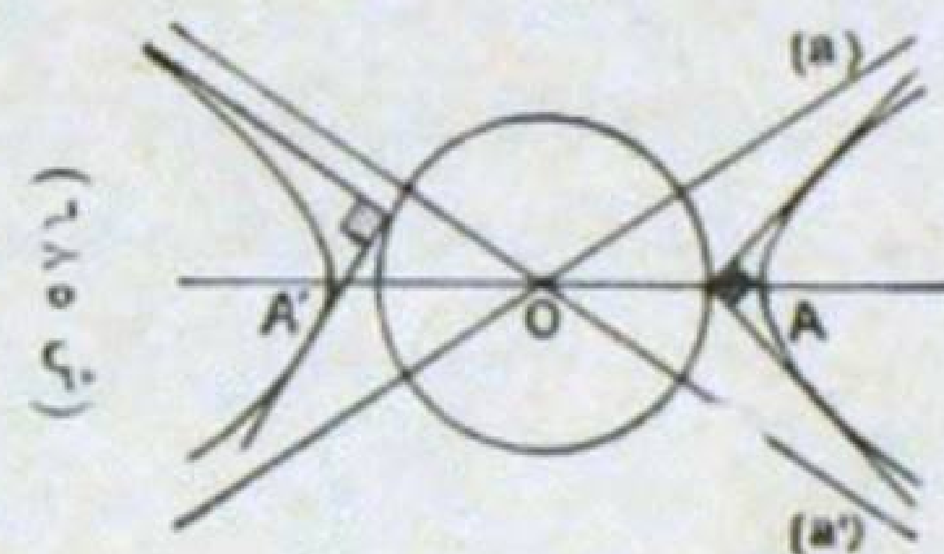
و نظر برابطهٔ (۱) داریم :

$$2\overline{OP}^2+2c^2=4a^2$$

واز آنجا $\overline{OP}^2=2a^2-c^2$

وچون بجای c^2 مقدار a^2+b^2 را قراردهیم (شمارهٔ ۸۷۱) حاصل میشود : $\overline{OP}^2=a^2-b^2$

یعنی مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ایست که مرکزش نقطهٔ O مرکز هذلولی و شعاعش $R=\sqrt{a^2-b^2}$ میباشد (ش ۶۸۵) واین دایره درصورتی وجود دارد که a^2 از b^2 بزرگتر باشد☆. این دایره را (درصورتیکه وجود داشته باشد) دایرهٔ **مونژ** مینامند.



(ش ۶۸۵)

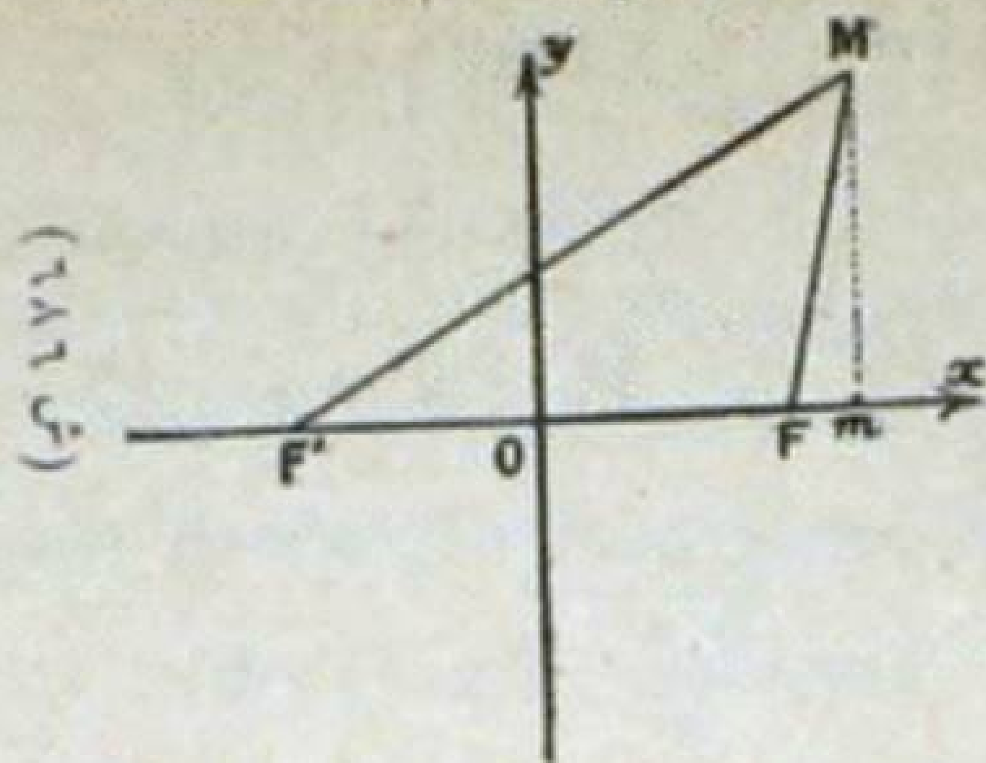
اگر داشته باشیم $a^2=b^2$ یعنی اگر هذلولی متساوی‌القطرین باشد نقطهٔ O تنها نقطه‌ایست که از آن میتوان مماسهای عمود برهم برهذلولی رسم کرد و این مماسها مجانبهای هذلولی میباشند.

معادلهٔ هذلولی

۸۸۰ ـ محاسبهٔ شعاع حاملهای یك نقطهٔ متعلق به‌هذلولی برحسب طول آن نقطه ـ کانونهای هذلولی (H) را F و F' وطول محور کانونی آنرا $2a$ وطول قطعه‌خط FF' را $2c$ مینامیم وخط نامحدود FF' را محور طولها (x'x) وجهت مثبت آنرا از F' بطرف F میگیریم و عمود منصف قطعه خط FF' را محور عرضها (y'y) اختیار میکنیم (ش ۶۸۶) حال نقطهٔ دلخواهی مانند M بمختصات x و y درصفحهٔ xOy در نظر میگیریم و طولهای MF و MF' را برحسب x و y و c حساب

☆ یعنی باید زوایای متقابل برأسی که از تقاطع دو مجانب هذلولی پدید میآیند و شاخه‌های هذلولی در داخل آنها واقعاند حاده باشد (شمارهٔ ۸۷۱).

میکنیم. همانطور که درمورد بیضی دیده‌ایم (شمارهٔ ۸۴۰) حاصل میشود :



(ش ۶۸۶)

$$\overline{MF}^2=(x-c)^2+y^2 \quad (۱)$$

$$\overline{MF'}^2=(x+c)^2+y^2 \quad (۲)$$

$$\overline{MF'}^2-\overline{MF}^2=4cx \quad (۳)$$

تا اینجا فرض کرده‌ایم که M نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ xOy باشد.

حال فرض میکنیم نقطهٔ M روی هذلولی (H) واقع باشد. اگر نقطهٔ M روی شاخهٔ [F] باشد داریم :

$MF'-MF=2a$ ونظر برابطهٔ (۳) حاصل میشود $MF'+MF=\dfrac{2cx}{a}$

و از آنجا $\boxed{MF=\dfrac{cx}{a}-a}$ و $\boxed{MF'=\dfrac{cx}{a}+a}$ (۴)

و اگر نقطهٔ M روی شاخهٔ [F'] واقع باشد داریم :

$MF-MF'=2a$ ونظر برابطهٔ (۳) حاصل میشود $MF'+MF=-\dfrac{2cx}{a}$

واز آنجا $\boxed{MF=a-\dfrac{cx}{a}}$ و $\boxed{MF'=-\dfrac{cx}{a}-a}$ (۵)

۸۸۱ ـ معادلهٔ هذلولی ـ اگر نقطهٔ M بمختصات x و y روی هذلولی (H) واقع باشد برحسب آنکه روی شاخهٔ [F] و یا روی شاخهٔ [F'] باشد شعاع حاملهای آن در روابط (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و یا (۱) و (۲) و (۳) و (۵) شمارهٔ قبل صادق هستند وچون مقدار MF را ازروابط (۴) یا (۵) در رابطهٔ (۱) قرار دهیم حاصل میشود :

$$(a-\frac{cx}{a})^2=(x-c)^2+y^2$$

و یا پس از انجام دادن عملیات لازم☆:

$$(\frac{a^2-c^2}{a^2})x^2+y^2=a^2-c^2$$

اما میدانیم که $c^2-a^2=b^2$ پس رابطهٔ فوق باینصورت درمیآید:

$$-\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=-b^2$$

و چون طرفین را بر $-b^2$ تقسیم کنیم حاصل میشود :

(٦) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

بنابراین هر نقطه که روی هذلولی (H) واقع باشد مختصاتش در رابطهٔ (٦) صادق هستند.

باروشی نظیر آنچه درمورد بیضی دیدیم (شمارهٔ ٨٤١) بآسانی میتوان تحقیق کرد که برعکس اگر مختصات نقطه‌ای دررابطهٔ (٦) صدق کنند آن نقطه روی هذلولی (H) واقع است و درنتیجه :

معادلهٔ هذلولیی که طول محور کانونیش 2a و فاصلهٔ کانونیش 2c باشد بفرض $b^2=c^2-a^2$ عبارتست از :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

تبصره - معادلهٔ هذلولی متساوی‌القطرین (a=b) عبارتست از $x^2-y^2-a^2=0$

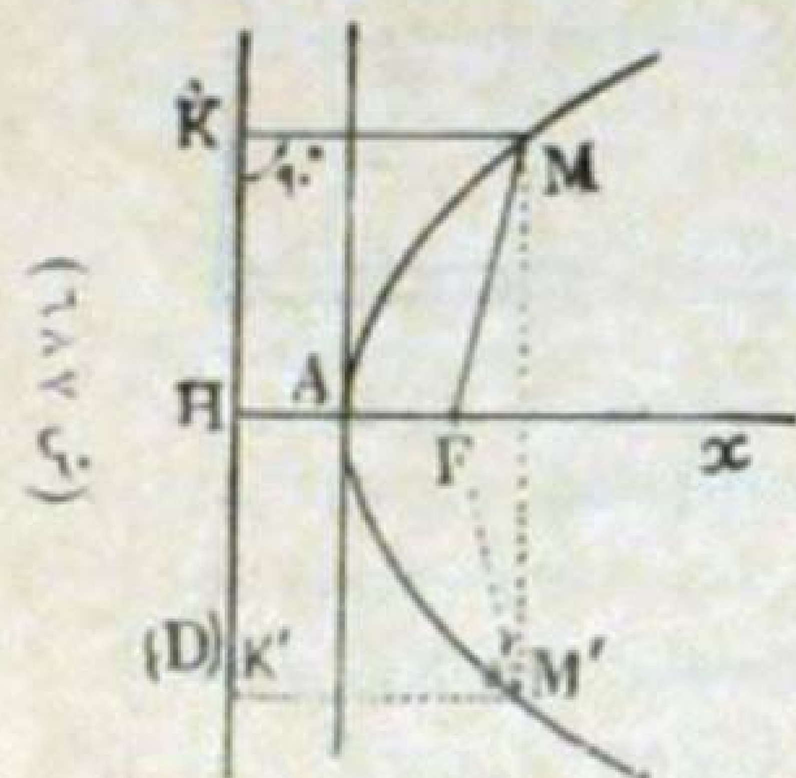
تمرین - بادرنظر گرفتن شکل ٦٨٠ (صفحهٔ ٥٢) تحقیق کنید که معادلات خطوط مجانب (a') و (a) بترتیب عبارتند از :

$$y=-\frac{b}{a}x \quad \text{و} \quad y=\frac{b}{a}x$$

☆ اگر مقدار MF' را از روابط (٤) یا (٥) در رابطهٔ (٢) قرار دهیم همین نتیجه بدست خواهد آمد.

٣ - سهمی

٨٨٢ - تعریف - در هر صفحه مکان هندسی نقاطی که از یك نقطه و از یك خط راست معلوم واقع در همان صفحه یك فاصله میباشند یك منحنی‌است که آنرا سهمی مینامند.



(ش ٦٨٧)

نقطهٔ معلوم را **کانون سهمی** و خط معلوم را **خط هادی** سهمی میگویند. اگر کانون سهمی را F و خط هادی آنرا D بنامیم وازنقطهٔ دلخواه M عمود MK را برخط D فرود آوریم (ش ٦٨٧) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ M روی سهمی باشد اینست که داشته باشیم :

(١) $$MF = MK$$

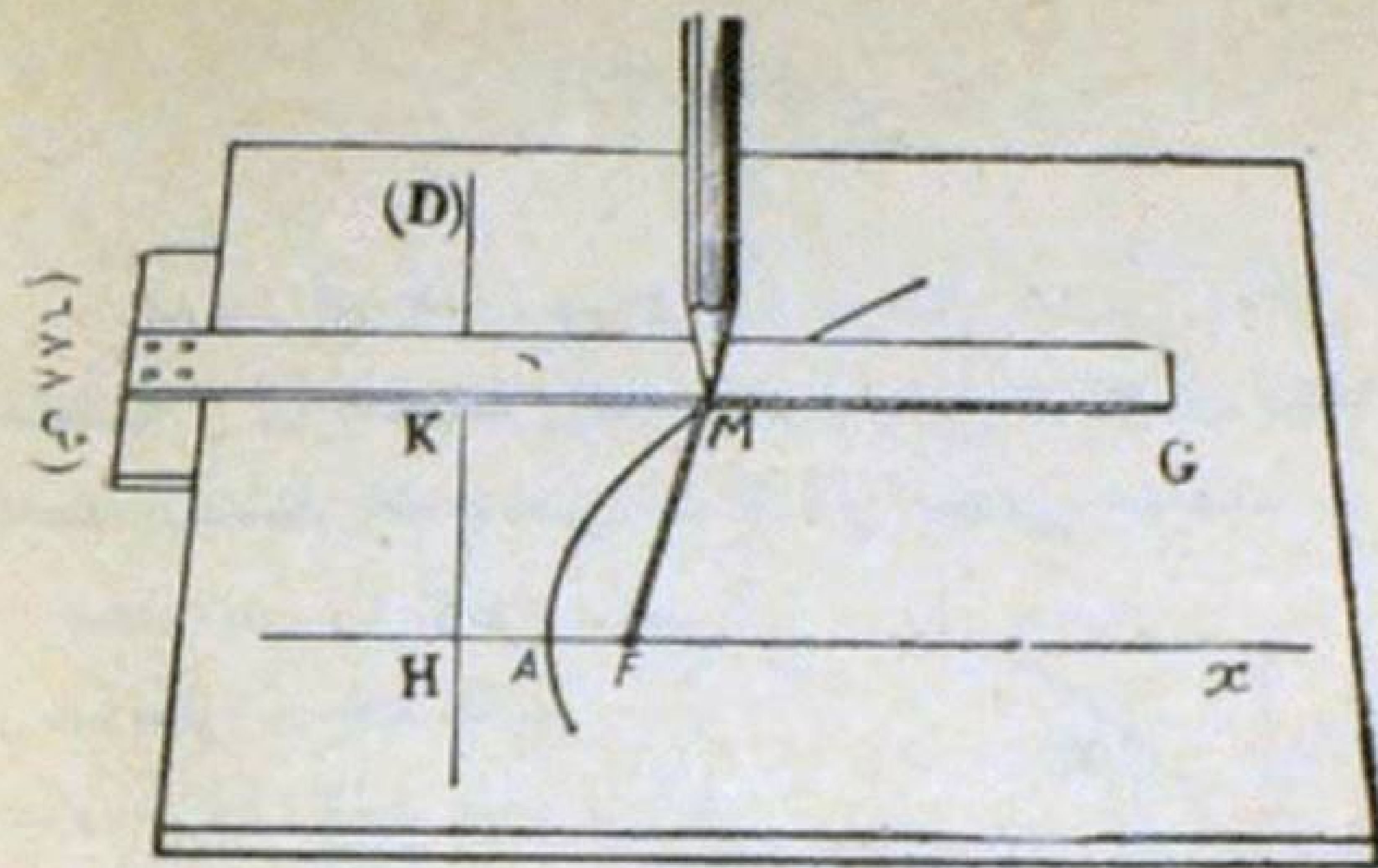
قطعه‌خط MF را **شعاع حامل** نقطهٔ M و فاصلهٔ کانون F را ازخط هادی D **پارامتر** سهمی مینامند و آنرا باحرف p مینمایانند.

٨٨٣ - محور و رأس سهمی - کانون سهمی را F و خط‌هادی آنرا D مینامیم - اگر نقطهٔ M روی سهمی واقع باشد (ش ٦٨٧) نقطهٔ M' قرینهٔ M نسبت بخط Fx که از نقطهٔ F برخط D عمود شود نیزروی سهمی واقع است زیرا نقطهٔ M' نیز از کانون F وهادی D یك‌فاصله است پس :

خطی که ازکانون‌سهمی برخط هادی‌آن عمودشود محور تقارن سهمی است. خط‌راست Fx را محور سهمی مینامند.

تنها نقطه‌ای از سهمی که روی‌محور آن واقع‌است عبارتست‌ازنقطهٔ A وسط قطعه‌خط FH (H فصل مشترك محورسهمی باخط هادی آنست).

نقطهٔ A را **رأس سهمی** میگویند.



(ش ٦٨٨)

خط D را بموازات یکی از اضلاع تخته مثلا ضلع سمت چپ رسم میکنیم و نقطهٔ F را در سمت راست آن میگیریم و یك T را مطابق شکل برتخته قرار میدهیم و یك‌سر نخی راکه طولش مساوی باطول KG باشد درنقطهٔ F بوسیلهٔ یك سنجاق ثابت نگاه میداریم و سر دیگرش را در نقطهٔ G به T متصل میکنیم و بوسیلهٔ نوك مدادی نخ را میکشیم تا قسمت MG از آن بر خط‌کش منطبق شود و قسمت MF ازآن راست‌باشد در اینصورت اگر نوك مداد را حرکت دهیم بطوریکه همواره برنخ متکی باشد نوك مداد یك سهمی رسم میکند زیرا همواره MG = MK = MF – طول نخ

۸۸۴ ـ قضیه ـ هرسهمی مکان هندسی مراکز دایره‌هاییست که ازکانون آن بگذرند و باخط هادی آن مماس باشند.

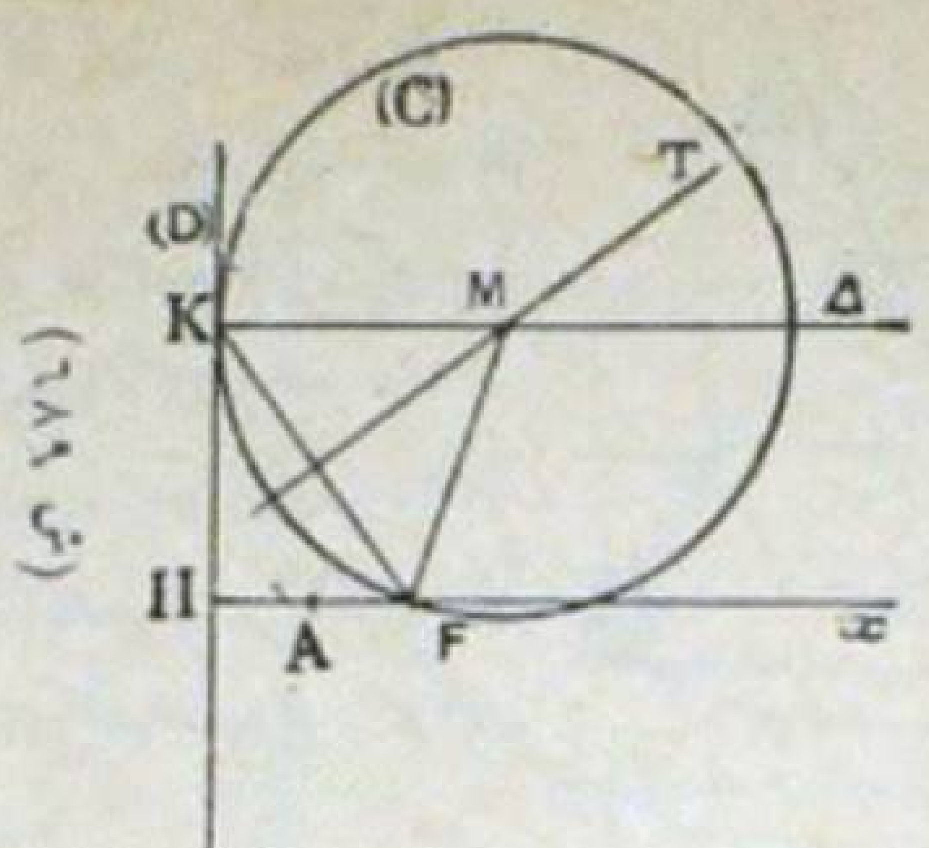
کانون سهمی را F و خط هادی آنرا (D) مینامیم.

اولا اگرنقطهٔ M روی این سهمی باشد دایرهٔ (C) که بمرکز M و بشعاع MF رسم شود (ش ٦٨٩) درنقطهٔ K یعنی پای عمود وارد از M برخط هادی با این‌خط هادی مماس میشود.

ثانیا هردایره مانند (C) که‌از F بگذرد و باخط هادی (D) مماس شود مرکزش از نقطهٔ F وازخط D بیك‌فاصله‌خواهدبود وقضیه ثابت‌است.

تبصره ـ اگر یك‌خط راست مانند D و نقطه‌ای مانند F که روی D واقع نباشد درنظر بگیریم نظر باستدلال فوق:

مکان‌هندسی مراکز دایره‌هایی که باخطراست معلوم D مماس‌باشند



(ش ٦٨٩)

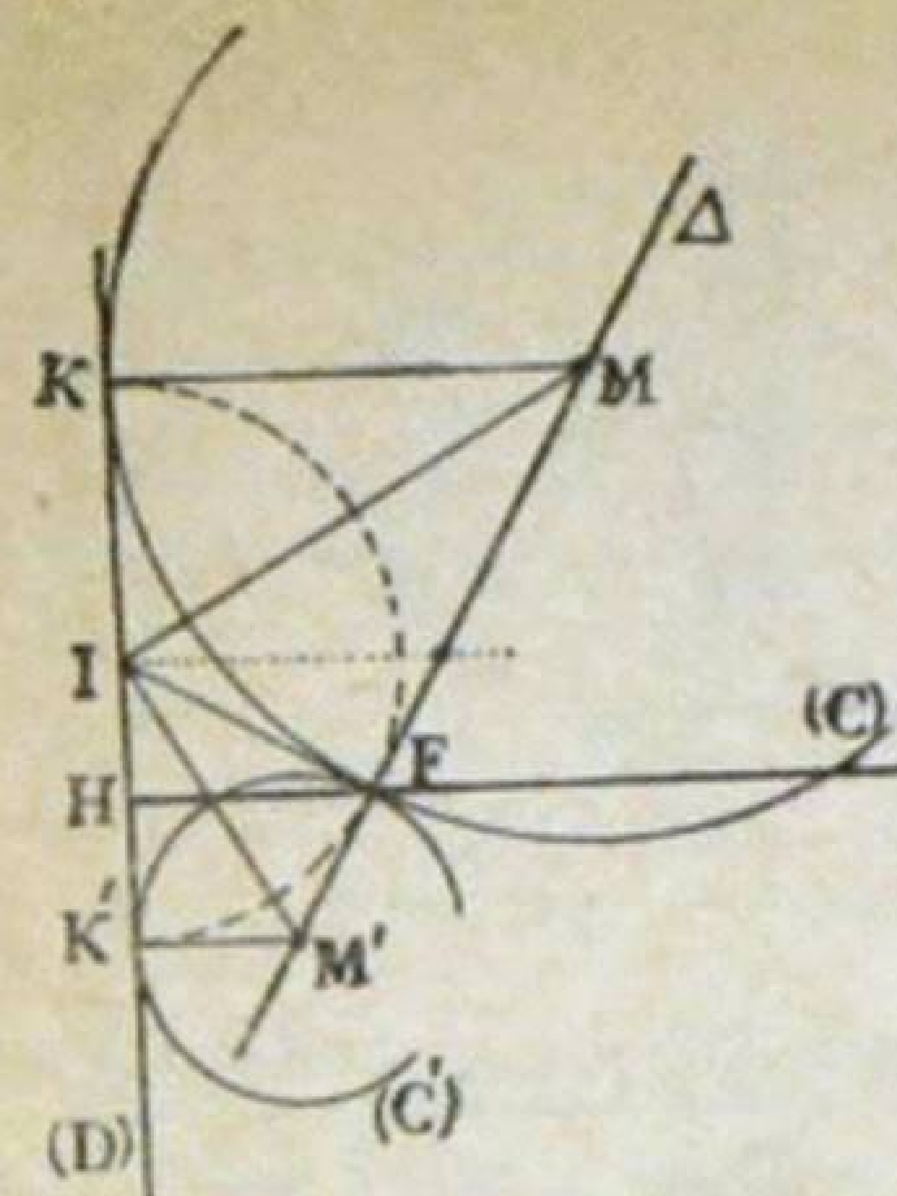
و ازنقطهٔ F که روی خط D واقع‌نیست بگذرند یك سهمی است.

نقطهٔ F کانون و خط D خط هادی این سهمی میباشد.

۸۸۵ ـ ترسیم‌سهمی بوسیلهٔ نقطه‌یابی ـ یك‌نقطه مانند K روی خط‌هادی‌اختیارو از آن‌نقطه‌خط Δ رابموازات‌محورسهمی‌رسم‌میکنیم(ش٦٨٩) میتوان نقطهٔ K را نقطهٔ تماس خط D بادایره‌ای مانند (C) دانست که‌از کانون F بگذرد و با خط هادی D مماس شود. مرکز دایرهٔ (C) روی سهمی واقع‌است. این مرکز عبارتست از نقطهٔ M فصل‌مشترك عمودمنصف قطعه‌خط FK با خط Δ. اگر نقطهٔ K را روی خط هادی D تغییر مکان دهیم میتوان نقاط مختلف سهمی را بدست آورد. ازاینرو نتیجه میشود که: هرخط که بموازات محور سهمی رسم شود سهمی را فقط در یك نقطه قطع میکند.

۸۸٦ ـ فصل‌مشترك سهمی با یك‌خط راست ـ میخواهیم فصل مشترك خطراست Δ را با سهمی که کانونش F و خط هادیش D باشد بدست آوریم. برحسب آنکه خط Δ ازکانون سهمی بگذرد و یا نگذرد دوحالت تمیز میدهیم.

حالت اول ـ خط Δ از کانون سهمی میگذرد ـ فصل مشترکهای خط Δ باسهمی نقاطی ازخط Δ هستند که‌بتوان هریك‌از آنها را مرکزدایره‌ای اختیار کرد که از کانون F بگذرد و باخط‌هادی D مماس باشد. چنین دایره‌ای در نقطهٔF باخطی که از F بر Δ عمود شود مماس خواهد بود. پس اگر از F عمودی برخط Δ اخراج کنیم و فصل مشترك



(ش ۶۹۰)

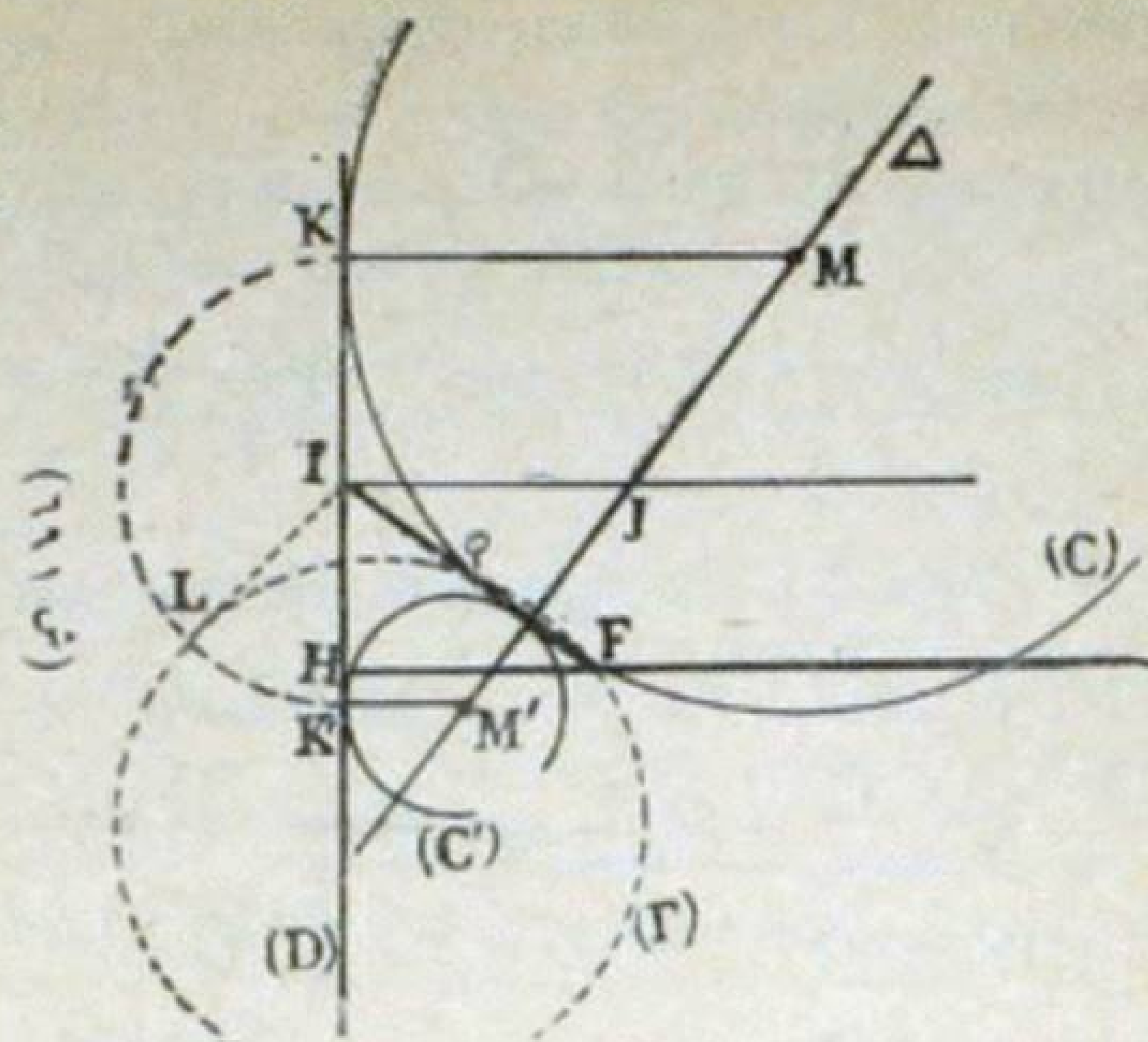
آنرا باخط هادی D نقطهٔ I بنامیم (ش ۶۹۰) نقاط تماس خط D با دایره‌های مذکور نقاطی مانند K و K' از خط D هستند که از نقطهٔ I بفاصله‌ای مساوی با IF واقع باشند و نقاط تقاطع سهمی باخط Δ عبارتند از نقاط M و M' فصل‌مشترکهای Δ باعمودهایی که از نقاط K و K' بر D اخراج شوند.

تبصره ـ خطوط IM و IM' بترتیب زوایای KIF و $K'IF$ را نصف میکنند و بنابراین زاویهٔ MIM' قائمه است ـ چون I وسط قطعه خط KK' است اگر از I خطی بموازات محور سهمی رسم کنیم این‌خط از وسط قطعه خط MM' میگذرد.

حالت‌دوم ـ خط Δ از کانون‌سهمی نمیگذرد ـ قرینهٔ کانون F را نسبت بخط Δ نقطهٔ φ مینامیم (ش ۶۹۱). هردایره که از نقطهٔ F بگذرد و مرکزش روی خط Δ واقع باشد از نقطهٔ φ نیز خواهد گذشت پس برای تعیین فصل‌مشترکهای خط Δ باسهمی باید مراکز دایره‌هایی راکه از نقاط F و φ میگذرند و باخط هادی D مماس هستند تعیین کنیم. مراکز این دایره‌ها نقاط تقاطع خط Δ با سهمی هستند. این مسئله را در شمارهٔ ۴۷۰ (متمم مقالات سوم و چهارم) حل کرده‌ایم و در اینجا راه حل آنرا ذکر میکنیم☆ :

از نقاط F و φ دایره‌ای‌مانند Γ میگذرانیم و از نقطهٔ I یعنی فصل مشترك خط $F\varphi$ با خط D مماس IL را بردایرهٔ Γ رسم میکنیم و ابتدا

☆ دلیل صحت این راه حل باختصار از اینقرار است :
کافیست نقطهٔ تماس هریك از دایره‌های مزبور را باخط هادی (D) بدست آوریم. خط $F\varphi$ خط D را درنقطه‌ای مانند I قطع میکند و اگر یکی از نقاط تماس مجهول را K بنامیم داریم $\overline{IK}^2=\overline{I\varphi}\times\overline{IF}$ یعنی IK واسطهٔ هندسی است مابین $I\varphi$ و IF پس اگر دایره‌ای از نقاط φ و F بگذرانیم و از I مماس IL را برآن رسم کنیم طول IL مساوی IK خواهد بود.

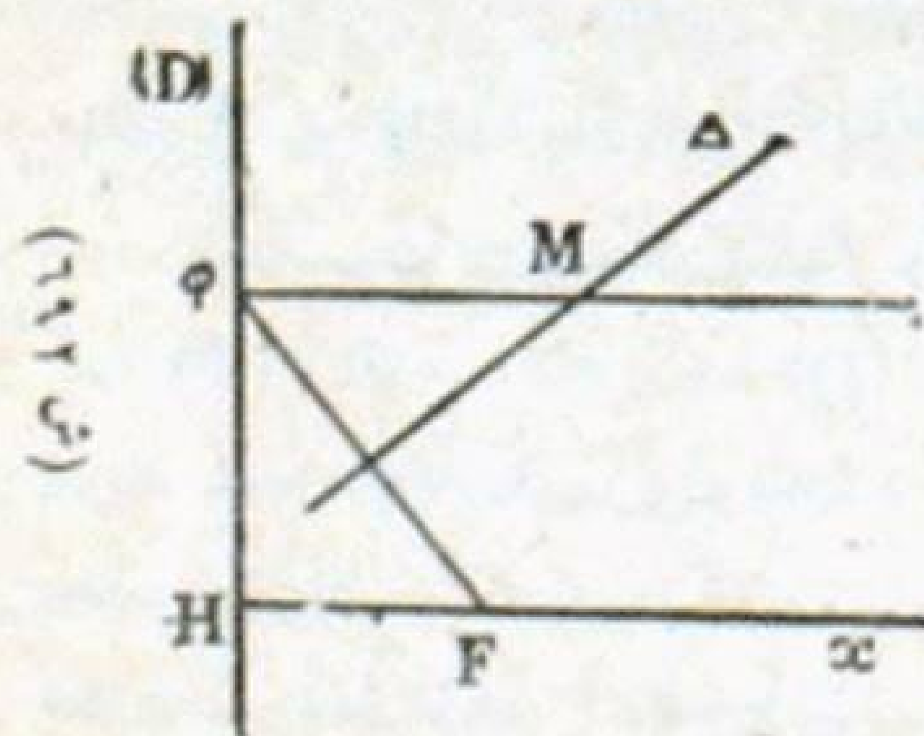


(ش ۶۹۱)

از I قطعه‌خطهای IK و IK' را مساوی با IL برخط (D) جدامیکنیم. نقاط K و K' نقاط تماس دایره‌های مذکور با خط هادی هستند و مراکز این دایره‌ها از طرفی روی‌خط Δ و از طرف دیگر روی خطوطی که از K و K' برخط D عمودشوند واقعند. پس اگر فصل مشترك این عمودها را با Δ نقاط M و M' بنامیم این نقاط فصل‌مشترکهای سهمی باخط Δ هستند.

بحث ـ اگر نقاط F و φ در یك طرف خط‌هادی (D) واقع باشند خط Δ (بشرط آنکه بامحور سهمی موازی نباشد☆) سهمی‌را در دونقطه قطع میکند. اگر نقاط F و φ در دوطرف خط D واقع باشند خط Δ با سهمی نقطهٔ مشترکی ندارد.

اگر نقطهٔ φ روی خط هادی واقع شود (ش ۶۹۲) فقط یك دایره میتوان‌یافت که‌از نقاط F و φ بگذرد و باخط D مماس شود. مرکز این دایره عبارتست ازفصل‌مشترك Δ با خطی که‌در φ برخط D عمود شود. در اینحالت خط Δ فقط یك نقطهٔ مشترك باسهمی داردودرشمارهٔ ۸۸۷ ثابت‌خواهیم کرد که دراینصورت Δ با سهمی مماس است.



(ش ۶۹۲)

☆ اینحالت را قبلا در شمارهٔ ۸۸۵ دیده‌ایم.

تبصره - اگر خط Δ در نقطه‌ای مانند K برخط هادی سهمی عمود باشد همانطور که درشمارهٔ ۸۸۵ دیدیم تنها نقطه‌ای که‌خط مزبور سهمی را قطع میکند روی‌عمودمنصف قطعه‌خط KF واقع است (ش۶۸۹)

از آنچه گذشت نتیجهٔ زیر بدست میآید :

هرخط که بامحور یك‌سهمی موازی باشد آن سهمی را در یك‌نقطه قطع میکند.

هرگاه خطی مانند Δ با محور سهمی موازی نباشد :

اولا اگر نقطهٔ φ یعنی قرینهٔ کانون F نسبت‌بخط Δ با F دریك‌طرف خط‌هادی واقع‌باشد خط Δ سهمی را در دو نقطه قطع میکند.

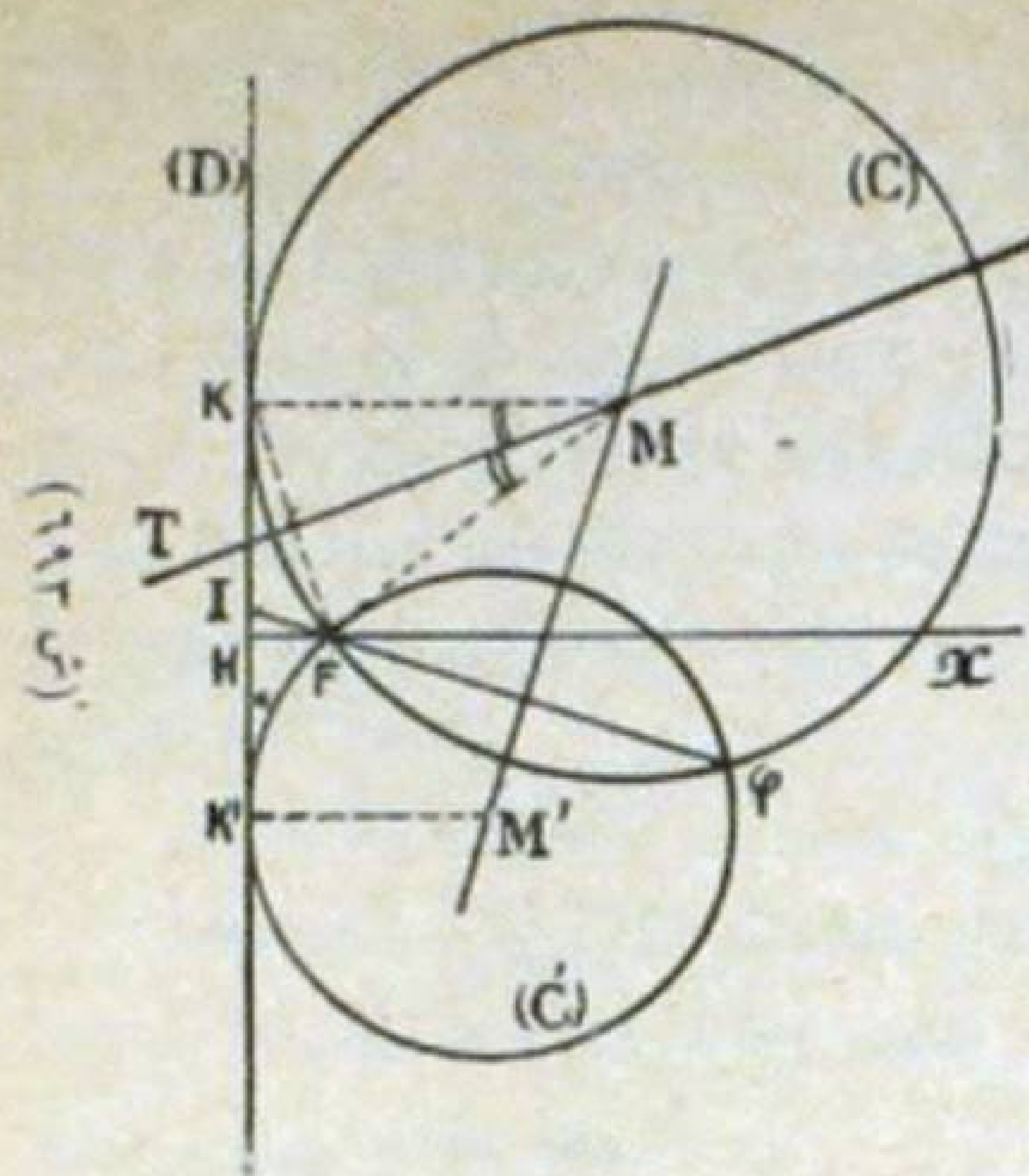
ثانیاً اگر نقاط φ و F در دو طرف خط هادی واقع باشند خط Δ سهمی را قطع نمیکند.

ثالثاً اگر نقطهٔ φ روی خط هادی واقع‌شود خط Δ فقط دریك‌نقطه باسهمی مشترك است.

۸۸۷ - خط مماس برسهمی دریکی‌از نقاط آن - همانطور که درمورد بیضی و هذلولی گفتیم (شمارهٔ ۸۲۶و۸۶۲) برای‌تحقیق آنکه در یك‌نقطه مانند M از سهمی خط مماس برسهمی وجود دارد یا نه باید دونقطهٔ مجاور M و M' را روی سهمی درنظر بگیریم و تحقیق کنیم که اگر نقطهٔ M' رفته رفته بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود خط قاطع MM' بسمت وضع حدی میل میکند یا نه .

فرض میکنیم F کانون و (D) خط‌هادی یك‌سهمی باشد و دو نقطهٔ مجاور M و M' را روی این سهمی درنظر میگیریم (ش ۶۹۳)

میدانیم که دایره‌های (C) و (C') که از نقطهٔ F میگذرند ومراکز آنها M و M' میباشند باخط (D) در نقاطی مانند K و K' مماس‌هستند. این دو دایره یکدیگر را درنقطهٔ دیگری مانند φ که قرینهٔ کانون F نسبت بخط MM' است قطع میکنند. محور اصلی این دو دایره یعنی خط $F\varphi$ خط هادی (D) را در نقطه‌ای مانند I قطع میکند. این‌نقطه که نسبت بدو دایرهٔ (C) و (C') دارای یك‌قوت‌مشترك‌است وسط‌قطعه‌خط KK' میباشد.



هرگاه نقطهٔ M' ثابت‌بماند ونقطهٔ M' روی‌سهمی حرکت کند و رفته رفته‌بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره بر آن منطبق شود نقطهٔ K' رفته رفته بنقطهٔ K نزدیك‌و بالاخره برآن منطبق‌میگردد ونقطهٔ I نیز بر K منطبق میشود و خط MM' که همواره برخط FI عمود است بسمت خط T که از M بر FK عمودشود میل میکند (خط T عمودمنصف‌قطعه‌خط FK است) پس‌خط T درنقطهٔ M برسهمی مماس‌است.

این نکته شایستهٔ دقت است که مماس MT عبارتست‌از نیمساز زاویهٔ KMF یعنی نیمساز زاویهٔ شعاع حامل MF باخط MK که از M برخط هادی سهمی عمود شود .

از آنچه گذشت نتیجه میشود که :

قضیه - درهرنقطه مانند M از سهمی یك خط مماس بر سهمی وجود دارد واین‌خط‌مماس عبارتست‌ازخط نیمساز زاویهٔ شعاع‌حامل نقطهٔM وخطی که‌ازM برخط هادی سهمی‌عمودشود.

اگرنقطهٔ M برراس سهمی منطبق‌باشد مماس در آن نقطه برسهمی برمحور سهمی عمود است.

۸۸۸ - تبصره - طریقهٔ ترسیم‌سهمی بوسیلهٔ نقطه‌یابی که درشمارهٔ ۸۸۵ شرح دادیم دارای این خاصیت جالب توجه است که عمودمنصف قطعه خط FK که از تقاطع آن باعمودی‌که از K برخط هادی رسم‌شود نقطهٔ M از سهمی بدست میآید خودش خط مماس برسهمی در نقطهٔ M میباشد.

خاصیت‌های خط مماس بر سهمی

۸۸۹ - در شکل ۶۹۳ دیده میشود که نقطهٔ K از خط هادی (D) عبارتست از قرینهٔ کانون F نسبت بخط مماس MT

برعکس قرینهٔ کانون F را نسبت بیك خط راست مانند T نقطهٔ K مینامیم. اگر نقطهٔ K روی خط هادی (D) واقع باشد خطی که از نقطهٔ K برخط هادی عمود شود خط T را در نقطه‌ای مانند M قطع میکند. نقطهٔ M روی سهمی است (شمارهٔ ۸۸۵) و خط T در نقطهٔ M برسهمی مماس است (شمارهٔ ۸۸۷)

از مطالب فوق قضیهٔ زیر بدست میآید :

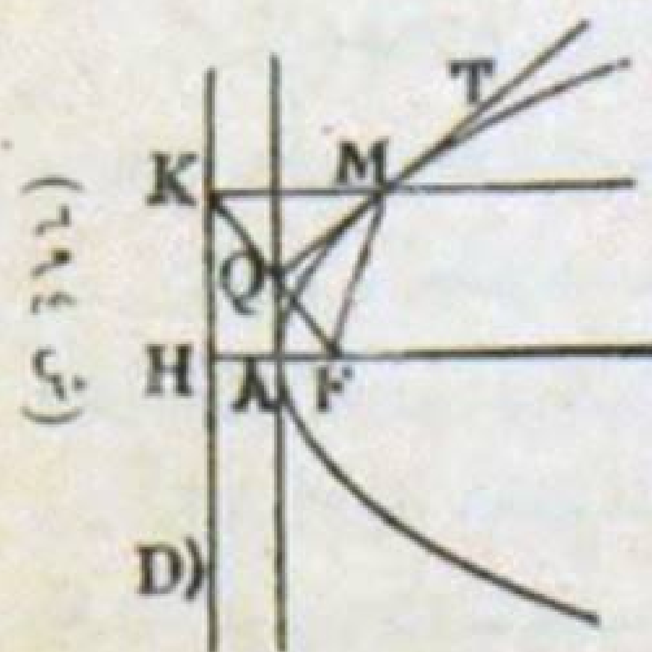
قضیهٔ ۱ - برای آنکه یك خط راست بایك سهمی مماس باشد لازم و کافیست که قرینهٔ کانون سهمی نسبت بآن خط روی خط هادی سهمی واقع باشد .

این قضیه را میتوان بصورت زیر نیز بیان کرد :

مکان‌هندسی قرینه‌های کانون سهمی نسبت بخطوط مماس برآن عبارتست ازخط هادی‌سهمی.

۸۹۰ - نتیجه - عمودمنصف‌های قطعه‌خطهاییکه نقاط مختلف یك خط‌راست را بیك نقطهٔ ثابت واقع در خارج آن خط وصل میکنند همگی بریك سهمی مماسند . خط راست مزبور خط هادی و نقطهٔ ثابت مذکور کانون این سهمی میباشد.

۸۹۱ - خط مماس بر سهمی در رأس آن - تصویر کانون F روی مماس MT عبارتست از نقطهٔ Q وسط قطعه خط FK (ش ۶۹۴) و اگر وسط قطعه‌خط FH یعنی رأس سهمی را A بنامیم و A را به Q وصل کنیم قطعه‌خط AQ که‌اوساط دوضلع از مثلث FHK را بهم‌وصل میکند باضلع سوم آن یعنی با خط هادی (D) موازیست. اما خط AQ در رأس A بر سهمی مماس است پس وقتی نقطهٔ M روی سهمی و



(ش ۶۹۴)

نقطهٔ K روی خط هادی حرکت کند نقطهٔ Q روی خط مماس بر رأس سهمی حرکت میکند .

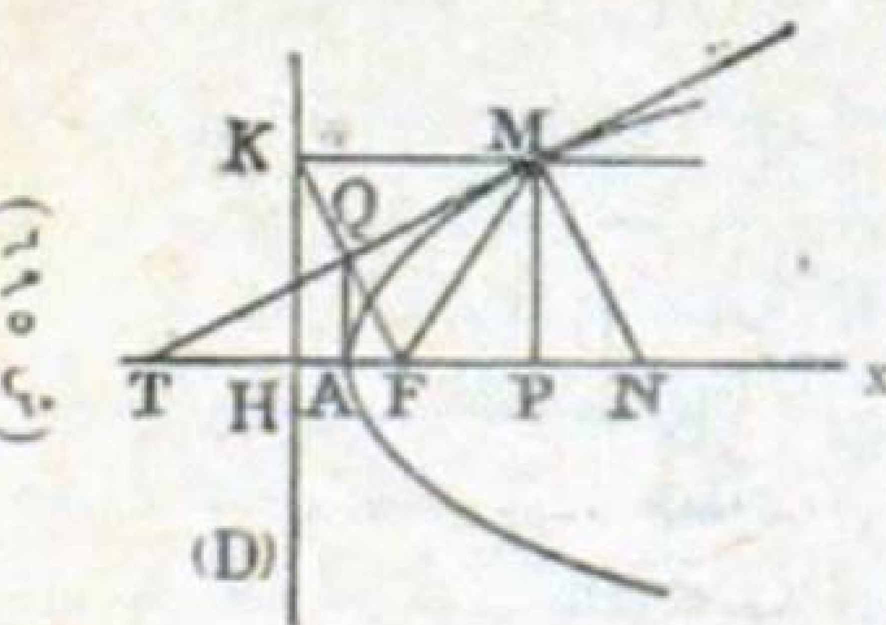
برعکس اگر نقطهٔ Q یکی‌از نقاط خط مماس بر رأس سهمی باشد واز نقطهٔ Q عمود QT را بر FQ رسم کنیم و قرینهٔ کانون F را نسبت بخط T نقطهٔ K بنامیم واضح‌است که نقطهٔ K روی خط هادی واقع‌میباشد پس خط QT برسهمی مماس است .

از آنچه گذشت قضیهٔ زیر حاصل میشود :

قضیهٔ۲ - برای آنکه یك خط راست با یك سهمی مماس باشد لازم و کافیست که تصویرکانون سهمی بر آن خط متعلق بمماس بررأس سهمی باشد.

۸۹۲ - نتیجه - اگر زاویهٔ قائمه‌ای درصفحهٔ خود چنان تغییر مکان دهد که رأسش همواره روی یك خط راست ثابت حرکت کند و یك ضلعش همواره از نقطهٔ ثابتی که روی خط راست مزبور واقع‌نباشد بگذرد محمل ضلع دیگرش* بریك سهمی که نقطهٔ ثابت مزبورکانون آن وخط راست مزبور خط هادی آنست همواره مماس میباشد .

۸۹۳ - تحت مماس و تحت قائم سهمی - نقطهٔ M را روی یك سهمی درنظر میگیریم (ش ۶۹۵) وتصویر M را برمحور Fx سهمی نقطهٔ P مینامیم‌ومماس‌وقائم** در نقطهٔ M بر سهمی را رسم میکنیم تا اولی محور سهمی را درنقطه‌ای مانند T و دومی محور سهمی را درنقطه‌ای مانندN قطع کنند. قطعه خطهای PT و PN را بترتیب **تحت مماس و تحت قائم** سهمی درنقطهٔ M مینامند.



(ش ۶۹۵)

* مقصود خط راستی‌است که ضلع دیگر زاویه برروی آن واقع‌است

** قائم برسهمی در یکی‌ازنقاط آن مانند M خط‌عمودیست که از M برمماس MT رسم شود.

۸۹۴ - قضیه - اولا تحت قائم سهمی درهریك از نقاط آن مساوی با پارامتر سهمی است. ثانیاً رأس سهمی در وسط هریك از تحت مماسهای آن واقع است.

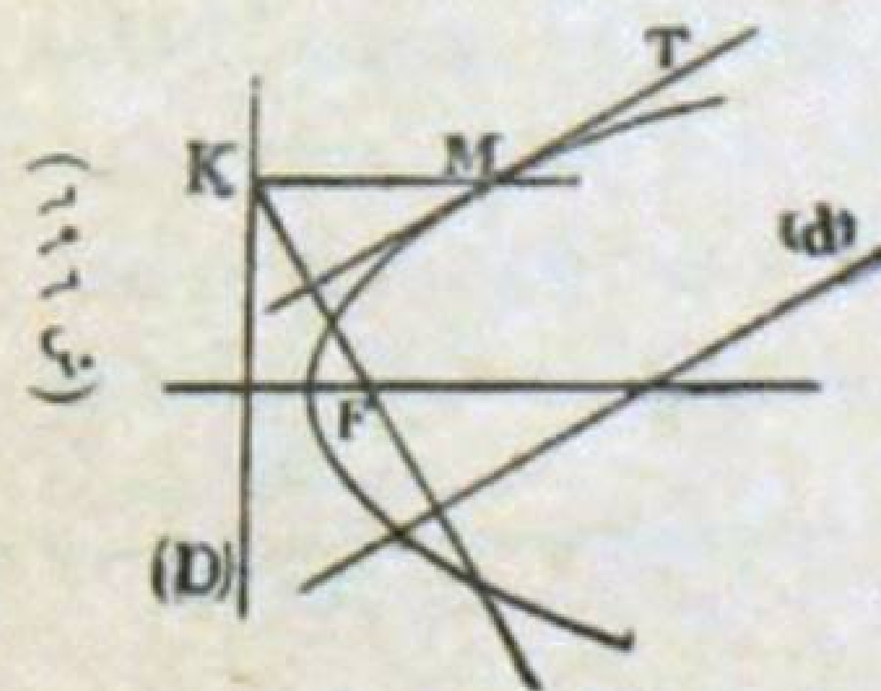
اولا تصویر نقطهٔ M را برخط هادی نقطهٔ K مینامیم (ش ۶۹۵). مماس درنقطهٔ M برسهمی عمودمنصف قطعه‌خط KF میباشد وقائم برسهمی در نقطهٔ M باخط FK موازیست. اگر فصل‌مشترك محور و خط هادی را نقطهٔ H بنامیم دومثلث قائم‌الزاویهٔ KHF و MPN متساویند پس $PN = HF$ اما PN تحت قائم درنقطهٔ M و HF پارامتر سهمی است (شمارهٔ ۸۸۲) و قسمت اول قضیه ثابت است.

ثانیا فصل‌مشترك مماس MT رابا KF نقطهٔ Q مینامیم (میدانیم که نقطهٔ Q وسط قطعه خط KF است). دومثلث KQM و FQT متساویند (در حالت دوزاویه وضلع بین آنها $KQ = QF$) و بنابراین نقطهٔ Q وسط قطعه‌خط MT است وچون نقطهٔ Q روی مماس بررأس سهمی واقع است (شمارهٔ ۸۹۱) پس رأس سهمی یعنی نقطهٔ A وسط تحت مماس PT میباشد.

مسائل مربوط بخط مماس

۸۹۵ - مسئلهٔ ۱ - خط‌راست d درصفحهٔ یك‌سهمی مفروض است. میخواهیم خط‌مماسی بموازات خط d برسهمی رسم کنیم.

فرض‌میکنیم F کانون سهمی و (D) خط‌هادی آن باشد (ش ۶۹۶) قرینهٔ کانون F نسبت بخط مماس مطلوب از طرفی روی خط هادی (D) (شمارهٔ ۸۸۹) و از طرف دیگر روی عمود مرسوم از نقطهٔ F بر خط d است (زیرا مماس مطلوب باخط d موازیست) بنابراین اگر از نقطهٔ F خطی بر d عمود کنیم وفصل مشترك آنرا با خط هادی (D) نقطهٔ K بنامیم عمودمنصف قطعه‌خط FK یعنی خط T مماس مطلوبست. نقطهٔ تماس M عبارتست از فصل مشترك مماس T با خطی که از نقطهٔ K بر خط هادی عمود شود.

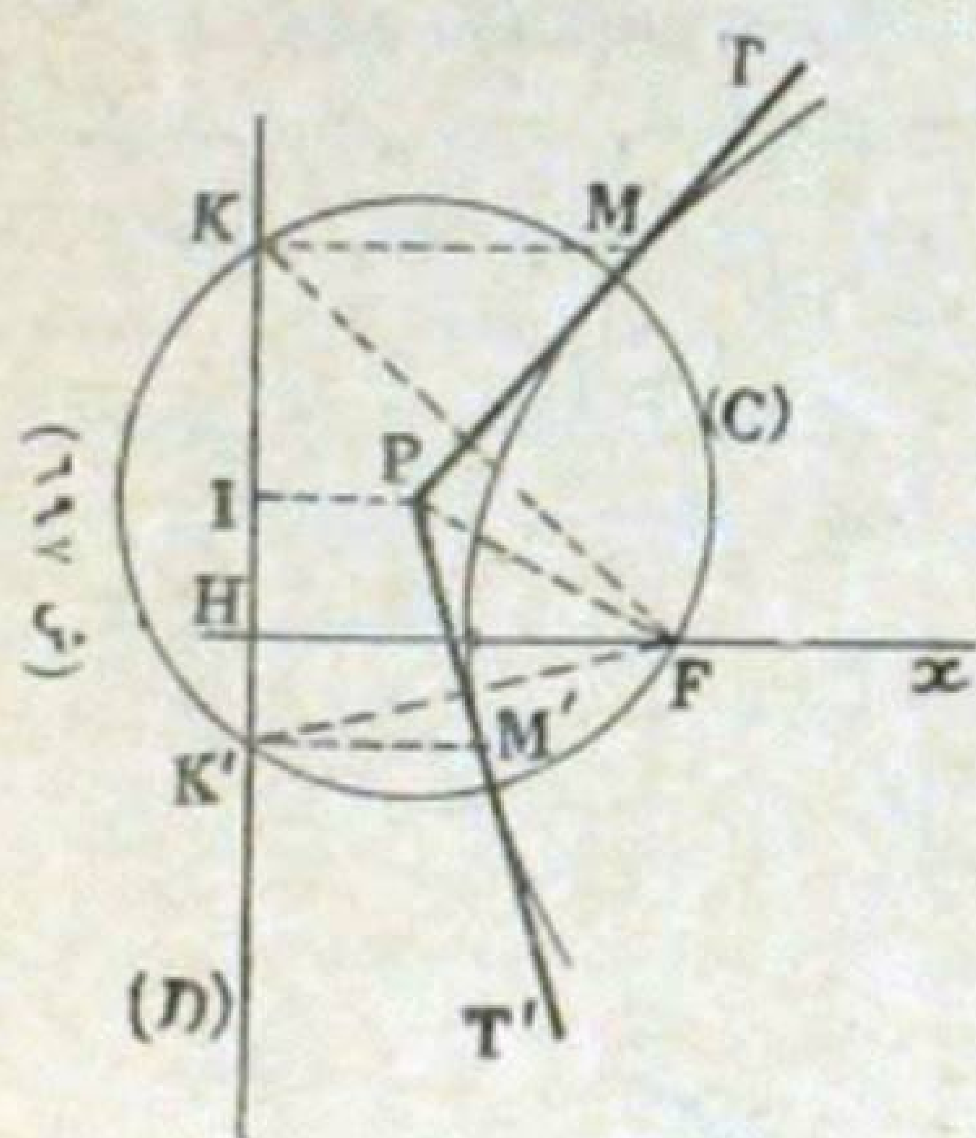


(ش ۶۹۶)

مسئله همواره یك جواب دارد مگر در صورتیکه خط d با محور سهمی موازی باشد.

تمرین - شکل ۶۹۱ را که برای تعیین نقاط فصل‌مشترك خط Δ با سهمی بکار بردیم درنظر بگیرید و تحقیق کنید که اگر خط Δ بموازات خود در صفحهٔ تغییر مکان دهد نقطهٔ I ثابت میماند و خطی که از نقطهٔ I بموازات محور سهمی رسم شود ازنقطهٔ J وسط وتر MM' میگذرد. و اگر خط مماسی بموازات خط Δ برسهمی رسم کنیم خط IJ ازنقطهٔ تماس آن میگذرد. خط راستی را که از I بموازات محور سهمی رسم میشود **قطر نظیر امتداد Δ** مینامند.

۸۹۶ - مسئلهٔ ۲ - میخواهیم از نقطهٔ معلوم P واقع در صفحهٔ یك‌سهمی مماسی برآن سهمی رسم کنیم.



(ش ۶۹۷)

فرض‌میکنیم F کانون سهمی و (D) خط‌هادی آن باشد (ش۶۹۷) قرینهٔ کانون F نسبت بخط مماس مطلوب ازطرفی روی خط‌هادی (D) (شمارهٔ ۸۸۹) و از طرف‌دیگر روی دایرهٔ (C) که مرکزش P و شعاعش PF باشد واقع است زیرا دو نقطه که نسبت بخط مماس مطلوب قرینهٔ یکدیگر باشند از هر نقطهٔ واقع براین خط‌مماس و از جمله از نقطهٔ P بیك‌فاصله واقعند.

اگردایرهٔ (C) خط‌هادی (D)را درنقاط K و K' قطع کند میتوان از نقطهٔ P دومماس برسهمی رسم کرد و در اینصورت میگویند **نقطهٔ P درخارج سهمی واقع است.** این دو مماس عبارتنداز عمود منصف‌های قطعه‌خطهای FK و FK' و نقاط تماس آنها M و M' بترتیب روی خطوط راستی که از نقاط K و K' عمود برخط هادی رسم شود واقعند.

اگر دایرهٔ (C) باخط هادی (D) مماس باشد نقطهٔ P روی سهمی واقع است (شمارهٔ ۸۸۴) و مسئله یك‌جواب دارد که همان مماسی است که میتوان در نقطهٔ P واقع برسهمی برآن رسم کرد.

اگردایرهٔ (C) باخط‌هادی (D) نقطهٔ مشترکی نداشته باشد نمیتوان از نقطهٔ P مماسی برسهمی رسم کرد و دراینصورت میگویند **نقطهٔ P در**

داخل سهمی واقع است.

۸۹۷ - شرط آنکه نقطه‌ای مانند P در خارج یك سهمی واقع باشد - برای آنکه نقطهٔ P درخارج سهمی واقع باشد یعنی بتوانیم از P دو مماس بر سهمی رسم کنیم لازم و کافیست که دایرهٔ (C) خط هادی (D) را قطع کند (ش ۶۹۷) و میدانیم برای آنکه دایرهٔ (C) خط هادی (D) را قطع کند لازم و کافیست که فاصلهٔ مرکز آن یعنی فاصلهٔ P از خط (D) کوچکتر از شعاع PF باشد یعنی لازم و کافیست که داشته باشیم $PI<PF$ پس:

برای آنکه نقطه‌ای درخارج سهمی واقع باشد لازم و کافیست که فاصلهٔ آن ازخط هادی کوچکتر از فاصلهٔ آن از کانون سهمی باشد.

۸۹۸ - قضایای پونسله - اگر از نقطهٔ P واقع درخارج یك سهمی دوخط مماس بر آن رسم کنیم و نقاط تماس را M و M' و وسط قطعه‌خط MM' را نقطهٔ J و کانون سهمی را F بنامیم:

اولا خط راست PF خط نیمساز زاویهٔ MFM' است و خطی که از نقطهٔ P بموازات محور سهمی رسم شود از نقطهٔ J میگذرد. ثانیاً خطوط مماس☼ نسبت بخط نیمساز زاویهٔ FPJ قرینهٔ یکدیگرند.

اولا شکلی را که در شمارهٔ ۸۹۶ برای ترسیم مماسهای PM و PM' بکار بردیم در نظر میگیریم (ش ۶۹۸) وخط PX را از نقطهٔ P عمود برخط

(ش ۶۹۸)

☼ مقصود خطوط راست نامحدود PM و PM' است.

هادی رسم میکنیم واضح است که:

$\widehat{PFM}=\widehat{PKM}$ (تقارن نسبت بخط PM)

و $\widehat{PFM'}=\widehat{PK'M'}$ (تقارن نسبت بخط PM')

اما $\widehat{PKM}=\widehat{PK'M'}$ (تقارن نسبت بخط PX)

پس $\widehat{PFM}=\widehat{PFM'}$ یعنی خط FP زاویهٔ MFM' را نصف میکند.

ازطرف دیگر خط PX از وسط قطعه‌خط KK' که آنرا I مینامیم میگذرد☼ و در ذوزنقهٔ KK'M'M خط PX که از نقطهٔ I وسط ساق KK' بموازات دوقاعدهٔ KM و K'M' رسم شده‌است از نقطهٔ J وسط ساق MM' میگذرد.

ثانیاً تصاویر F روی دو مماس که آنها را B و B' مینامیم روی دایرهٔ بقطر PF واقع هستند (ش ۶۹۸) وخط BB' که در رأس سهمی بر آن مماس است (شمارهٔ ۸۹۱) بر PX عمود میباشد.

بنابراین در مثلث PBB' ارتفاع نظیر ضلع BB' برخط PJ منطبق است و قطر دایرهٔ محیطی این مثلث PF میباشد ومیدانیم (به تبصرهٔ ذیل شمارهٔ ۸۳۸ رجوع کنید) که نیمساز زاویهٔ BPB' بر نیمساز زاویهٔ FPJ منطبق است پس خطوط مماس PT و PT' نسبت به نیمساز زاویهٔ FPJ قرینهٔ یکدیگرند.

۸۹۹ - مکان هندسی نقاطی که میتوان از آنها دو مماس عمود برهم بر یك سهمی رسم کرد - چون مماسهای PM و PM' بترتیب بر خطوط FK و FK' عمودند (ش ۶۹۹) برای آنکه دو مماس مزبور برهم عمود باشند لازم وکافیست که FK و FK' برهم عمود باشند و برای این لازم و کافیست که KK' قطری از دایرهٔ (C) باشد یعنی نقطهٔ P روی خط هادی (D) واقع باشد. از آنچه گفتیم قضیهٔ زیر حاصل میشود:

(ش ۶۹۹)

☼ زیرا نقطهٔ P مرکز دایره (C) و KK' وتری ازاین دایره است و PX را عمود بر KK' رسم کرده‌ایم.

قضیه - خط هادی سهمی مکان هندسی نقاطی است که از آنها میتوان دومماس عمود برهم برسهمی رسم کرد.

۹۰۰ - تبصره - اگر نقطهٔ P روی خط‌هادی‌سهمی باشد (ش۶۹۹) زوایای PFM و PFM' که بترتیب بازوایای PKM و PK'M' مساوی هستند قائمه میباشند وبنابراین :

اگر از نقطهٔ P واقع برخط‌هادی یك‌سهمی دومماس PM و PM' را برآن سهمی رسم کنیم خط راست MM' از کانون F میگذرد و بر PF عمود است.

۹۰۱ - معادلهٔ سهمی - فرض‌میکنیم نقطهٔ F کانون وخط (D) خط‌هادی سهمی باشد و تصویر کانون را روی خط هادی نقطهٔ H مینامیم و فاصلهٔ FH یعنی پارامتر سهمی را P میخوانیم ونقطهٔ O رأس سهمی را مبدأ مختصات و محور سهمی را محورطولها (x'x) وجهت مثبت آنرا از O بطرف کانون F اختیار میکنیم ومماس در رأس سهمی‌را محورعرضها (y'y) میگیریم (ش ۷۰۰)

(ش ۷۰۰)

برای آنکه نقطه‌ای مانند M روی سهمی باشد لازم و کافیست که فاصله‌اش‌از کانون F مساوی‌بافاصلهٔ آن ازخط هادی باشد و اگرتصویر M را روی خط‌هادی‌نقطهٔ K بنامیم لازم و کافیست که داشته باشیم :

$$MK = MF \qquad (۱)$$

اگر x و y مختصات نقطهٔ M و P تصویر M روی محور x'x باشد داریم :

$$x = \overline{OP} \quad و \quad y = \overline{PM} \quad و \quad \overline{OF} = \frac{P}{۲} \quad و \quad \overline{OH} = -\frac{P}{۲}$$

پس

$$\overline{MF}^۲ = \left(x - \frac{P}{۲}\right)^۲ + y^۲ \quad و \quad \overline{KM}^۲ = \left(x + \frac{P}{۲}\right)^۲$$

شرط لازم و کافی برای آنکه نقطهٔ M روی سهمی باشد اینست که تساوی زیر برقرار باشد :

$$y^۲ + \left(x - \frac{P}{۲}\right)^۲ = \left(x + \frac{P}{۲}\right)^۲$$

که بس‌از خلاصه کردن بصورت زیر که معادلهٔ سهمی‌است درمیآید :

$$\boxed{y^۲ = ۲px} \qquad (۲)$$

تمرین - تحقیق کنید که سهمی از نقطهٔ B بمختصات $\left(p \text{ و } \frac{P}{۲}\right)$ میگذرد ومماس در نقطهٔ B برسهمی خط HB میباشد.

سهمی را میتوان حد یك‌بیضی یا یك‌هذلولی دانست.

۹۰۲ - بیشتر قضایایی‌را که‌درموردسهمی ذکر کردیم شباهت‌زیادی باقضایای مربوط به‌بیضی وهذلولی دارند. خط هادی سهمی بمنزلهٔ دایرهٔ هادی بیضی و هذلولی است و مماس در رأس سهمی بمنزلهٔ دایرهٔ اصلی بیضی و هذلولی میباشد. جانشین یکی‌از کانونهای بیضی و هذلولی نقطهٔ بینهایت دور روی محور سهمی است. قضیهٔ زیر علت این تشابه را روشن میکند و وسیله‌ای بدست میدهد که بسیاری از خواص مربوط به‌سهمی را از خاصیت‌های مربوط به‌بیضی و هذلولی استنباط کنیم :

قضیه - سهمی حد یك‌بیضی (یا یك‌هذلولی) است که یکی‌از کانونها ورأس مجاور بآن‌کانونش ثابت‌بمانند و کانون دیگرش روی محور کانونی بینهایت دور شود.

فرض‌میکنیم F و F' کانونهای یك‌بیضی و A و A' رأسهای واقع روی محور اطول آن باشند و دایرهٔ هادی (D') نظیر کانون F' را رسم میکنیم(ش۷۰۱) یکی‌از نقاط‌تقاطع دایرهٔ (D') بامحور کانونی نقطهٔ H میباشد که قرینهٔ کانونF نسبت‌برأس A است.

(ش ۷۰۲)

میدانیم که بیضی مکان هندسی مراکز دایره‌هایی مانند (C) است که از کانون F میگذرند و بادایرهٔ هادی (D') مماسند.

اگر کانون F و رأس مجاور آن A ثابت بمانند و کانون F' روی محور کانونی درجهت از A بطرف F بینهایت دور شود نقطهٔ H ثابت

میماند ودایرهٔ هادی (D') که‌نقطهٔ H از آن ثابت است بسمت خط راست (D) که از نقطهٔ H برمحور کانونی عمود شود میل میکند. دراینصورت بیضی میل‌میکند بسمت مکان‌هندسی مراکزدایره‌هایی که‌از نقطهٔ F بگذرند و باخط ثابت (D) مماس باشند ومیدانیم‌این‌مکان یك‌سهمی‌است که کانونش F و خط هادیش (D) میباشد.

استدلال درمورد هذلولی نیز همین‌طور است.

[بعداً ثابت خواهیم کرد که فصل‌مشترکهای یك‌سطح مخروطی دوار با یك‌صفحهٔ قاطع یك‌بیضی یایك‌هذلولی و یا یك‌سهمی‌است و بهمین‌مناسبت این سه منحنی را مقطع‌های مخروطی مینامند].

٤ ـ خاصیت‌های مشترك مقطع‌های مخروطی

خطوط هادی بیضی و هذلولی

بیشتر خاصیت‌های این سه‌منحنی شباهت زیادی با یکدیگر دارند و روشی که برای‌حل کردن مسائل مربوط بآنها بکاربردیم یکسانست واگر مبتدیان حل هریك ازاین مسائل را پی‌درپی برای سه منحنی تکرار کنند زودتر و آسانتر میتوانند آنها را بخاطر بسپارند. از قضیهٔ زیر معلوم میشود که میتوان یك‌تعریف مشترك برای مقطع‌های مخروطی بیان کرد:

۹۰۳ ـ **قضیه** ـ دریك‌صفحه نقطه‌ای مانند F و خطراستی مانند D را درنظر میگیریم و فرض میکنیم نقطهٔ F روی خط D واقع نباشد.

مکان هندسی نقاطی ازاین صفحه که نسبت فاصلهٔ آنها از نقطهٔ معلوم F بفاصله‌شان ازخط معلوم D مساوی باعدد مثبت e میباشدبازای $e<1$ یك‌بیضی‌وبازای $e=1$ یك‌سهمی وبازای $e>1$ یك هذلولی است.

حالت اول : $e<1$

از نقطهٔ F خط x'x را عمود برخط D رسم میکنیم وپای این‌عمود را H مینامیم (ش ۷۰۲) وروی‌محور x'x جهت از F بطرف H را جهت

(ش ۷۰۲)

مثبت میگیریم. میدانیم که روی خط x'x دو نقطه مانند A و A' میتوان یافت بقسمیکه داشته باشیم:

$$\frac{A'F}{A'H}=e \qquad و \qquad \frac{AF}{AH}=e$$

این‌دو نقطه متعلق بمکان مذکور هستند.

یکی‌ازاین‌دونقطه مثلا A مابین F و H ودیگری یعنی A' درخارج قطعه‌خط FH واقع است وچون e کوچکتراز یك‌است‌داریم $A'F<A'H$ یعنی نقاط A' وF دریك‌طرف نقطهٔ H واقع‌هستند. بنابراین نقطهٔ F مابین نقاط A و A' قرار دارد.

وسط قطعه‌خط AA' را نقطهٔ O مینامیم و فاصلهٔ $OA=OA'$ را a و فاصلهٔ OF را c میخوانیم. چون تقسیم AA'FH توافقی است (زیرا $\frac{A'F}{A'H}=-\frac{AF}{AH}=e$) پس نظر بشمارهٔ ٤٤٦ (متمم مقالات‌سوم و چهارم) داریم:

$$\overline{OF}\times\overline{OH}=\overline{OA}^2 \quad \text{وازآنجا} \quad OH=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OF}}=\frac{a^2}{c} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر

$$e=\frac{AF}{AH}=\frac{A'F}{A'H}=\frac{AF+A'F}{AH+A'H}=\frac{2a}{2OH}=\frac{a}{\frac{a^2}{c}}=\frac{c}{a} \qquad (۲)$$

اگر محور x'x را محور طولها و عمودمنصف قطعه خط A'A را

محورعرضها ($y'y$) بگیریم‌وفرض کنیم نقطهٔ M بمختصات (x و y) یکی از نقاط مکان باشد وتصاویر نقطهٔ M را روی‌خط D نقطهٔ K و روی‌خط $x'x$ نقطهٔ P بنامیم داریم :

$$\overline{FP}=\overline{OP}-\overline{OF}=x-c \qquad (۳)$$

و

$$\overline{MK}=\overline{PH}=\overline{OH}-\overline{OP}=\frac{a^2}{c}-x \qquad (٤)$$

وچون نقطهٔ M را متعلق بمکان مزبور فرض کرده‌ایم :

$$\frac{MF}{MK}=e \quad \text{ویا} \quad \overline{MF}^2=e^2\times\overline{MK}^2 \qquad (٥)$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ MPF داریم :

$$\overline{MF}^2=\overline{FP}^2+\overline{PM}^2 \qquad (٦)$$

پس رابطهٔ (٥) باینصورت درمیآید :

$$\overline{FP}^2+\overline{PM}^2=e^2\times\overline{MK}^2$$

وبا درنظر گرفتن روابط (۲) و (۳) و (٤) و ملاحظهٔ اینکه $y=\overline{PM}$ نتیجه میشود :

$$(x-c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2$$

ویا

$$x^2-2cx+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^4}{c^2}-2\frac{a^2}{c}x+x^2\right)$$

ویا

$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

ویا

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

وچون a^2-c^2 را b^2 فرض کنیم✲ حاصل میشود :

$$\frac{x^2b^2}{a^2}+y^2=b^2$$

ویا بالاخره

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

✲ چون $e=\frac{c}{a}$ کوچکتر از یك است پس $a>c$ و $a^2-c^2>0$

یعنی نقطهٔ M که متعلق بمکان مذکور است روی بیضی (E) که طول محور اطول آن $2a$ وفاصلهٔ کانونی آن $2c$ است واقع میباشد (نقطهٔ F یکی‌از کانونهای این بیضی است) .

برعکس اگر نقطهٔ M بمختصات x و y روی بیضی (E) واقع‌باشد و تصاویر آنرا روی خط D نقطهٔ K و روی خط $x'x$ نقطهٔ P بنامیم داریم :

$$MF=a-\frac{cx}{a}=\frac{a^2-cx}{a} \qquad \text{(شمارهٔ ۸٤۰)}$$

وهمچنین

$$\overline{MK}=\overline{PH}=\overline{OH}-\overline{OP}=\frac{a^2}{c}-x=\frac{a^2-cx}{c}$$

و از مقایسهٔ این دورابطه نتیجه میشود $\frac{MF}{MK}=\frac{c}{a}=e$ یعنی‌هر نقطه که روی بیضی (E) واقع باشد متعلق بمکان مزبور میباشد وقضیه در این‌حالت ثابت است .

تعریف ـ خط D را خط هادی نظیر کانون F متعلق به بیضی (E) مینامند . و عدد e را که مساوی با نسبت $\frac{c}{a}$ وکوچکتر از یك است **خروج ازمرکز** بیضی میگویند.

چون‌محور $y'y$ محور تقارن بیضی‌است واضح‌است که خط D' قرینهٔ خط D نسبت به $y'y$ نیز خط هادی نظیر کانون F' ازبیضی میباشد.

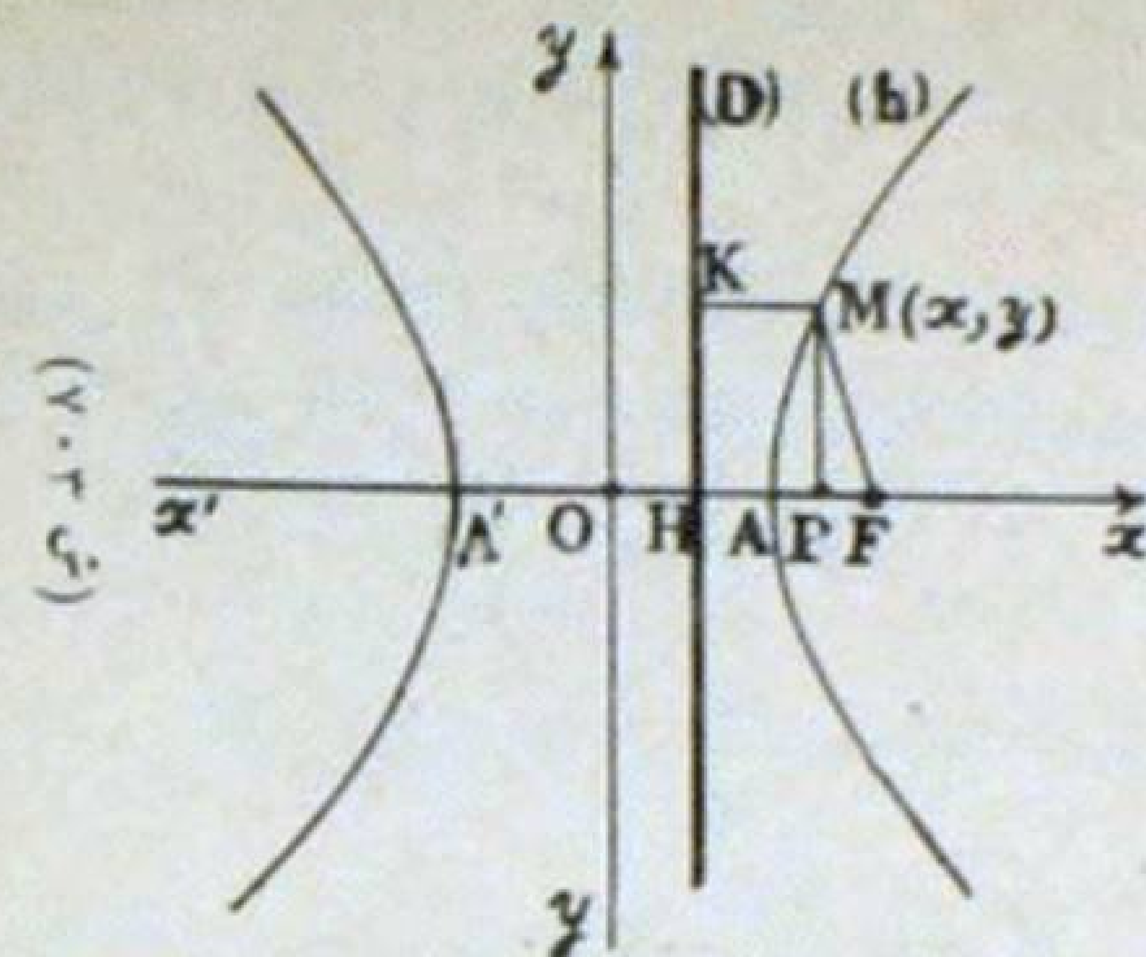
حالت دوم : $e=1$

دراین‌حالت اگر M یکی‌از نقاط‌مکان و K تصویر آن روی‌خط D باشد داریم $MF=MK$ و میدانیم که مکان مذکور یك سهمی است که کانونش F و خط هادیش D میباشد (شمارهٔ ۸۸۲)

حالت سوم✲ : $e>1$

از نقطهٔ F خط $x'x$ را عمود برخط D رسم میکنیم و پای این‌عمود را H مینامیم (ش ۷۰۳) وروی‌محور $x'x$ جهت از H بطرف F را جهت مثبت میگیریم . میدانیم که روی خط $x'x$ دو نقطه مانند A و A' میتوان یافت بقسمیکه داشته‌باشیم :

✲ توجه کنید که در اینحالت قراردادها و استدلال بجز در دو مورد عیناً مثل حالت اول است



(ش ۲۰۲)

$$\frac{AF}{AH}=e \quad \text{و} \quad \frac{A'F}{A'H}=e$$

این دونقطه متعلق بمکان مذکورهستند .

یکی ازاین دو نقطهٔ مثلاً A مابین F و H ودیگری یعنی A' درخارج قطعه‌خط FH واقع‌است وچون e بزرگتراز یك است. داریم $A'F>A'H$ یعنی نقاط A' و H در یك‌طرف نقطهٔ F واقع هستند و بنابراین نقطهٔ H مابین نقاط A و A' قرار دارد .

وسط قطعه‌خط AA' را نقطهٔ O مینامیم و فاصلهٔ $OA=OA'$ را a و فاصلهٔ OF را c میخوانیم. چون تقسیم AA'FH توافقی داریم :

$$OF\times OH=\overline{OA}^2 \quad \text{و از آنجا} \quad \overline{OH}=\frac{\overline{OA}^2}{OF}=\frac{a^2}{c}$$

واز طرف‌دیگر :

$$e=\frac{AF}{AH}=\frac{A'F}{A'H}=\frac{A'F-AF}{A'H-AH}=\frac{2a}{2OH}=\frac{a}{\frac{a^2}{c}}=\frac{c}{a}$$

اگر محور x'x را محور طولها و عمود منصف قطعه خط A'A را محور عرضها (y'y) بگیریم وفرض‌کنیم نقطهٔ M بمختصات (x و y) یکی از نقاط مکان باشد و تصاویر M را روی خط D نقطهٔ K و روی‌خط x'x نقطهٔ P مینامیم داریم :

$$\overline{FP}=\overline{OP}-\overline{OF}=x-c$$

و
$$\overline{MK}=\overline{PH}=\overline{OH}-\overline{OP}=\frac{a^2}{c}-x$$

و چون نقطهٔ M را متعلق بمکان مزبور فرض کرده‌ایم :

$$\frac{MF}{MK}=e \quad \text{و یا} \quad \overline{MF}^2=e^2\times\overline{MK}^2$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ MPF داریم $\overline{FP}^2+\overline{PM}^2=\overline{MF}^2$

واز آنجا
$$\overline{FP}^2+\overline{PM}^2=e^2\times\overline{MK}^2$$

واز محاسبه‌ای شبیه آنچه درحالت اول گفتیم نتیجه میشود :

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

وچون c^2-a^2 را b^2 فرض کنیم✡ حاصل میشود :

$$-\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=-b^2$$

ویا بالاخره
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

یعنی نقطهٔ M که متعلق بمکان مذکوراست روی هذلولی (h) که طول محور کانونی آن 2a و فاصلهٔ کانونی آن 2c است واقع میباشد (نقطهٔ F یکی‌از کانونهای این هذلولی است).

برعکس اگر نقطهٔ M بمختصات x و y روی هذلولی (h) واقع باشد و تصاویر آنرا روی خط D نقطهٔ K و روی خط x'x نقطهٔ P بنامیم داریم :

$$MF=\left|\frac{cx}{a}-a\right|=\frac{|cx-a^2|}{a} \quad \text{(شمارهٔ ۸۸۰)}$$

وهمچنین
$$\overline{KM}=\overline{HP}=\overline{OP}-\overline{OH}=x-\frac{a^2}{c}=\frac{cx-a^2}{c}$$

پس
$$KM=\frac{|cx-a^2|}{c}$$

وازمقایسهٔ این روابط نتیجهٔ میشود : $\frac{MF}{MK}=\frac{c}{a}=e$ یعنی هر نقطه که روی هذلولی (h) واقع باشد متعلق بمکان مزبور میباشد و قضیه دراین حالت نیز ثابت است

✡ در اینجا چون $e=\frac{c}{a}$ بزرگتراز یك است پس: $c>a$ و $c^2-a^2>0$

تعریف ـ خط D را خط هادی نظیر کانون F متعلق به هذلولی (H) مینامند و عدد e را که مساوی با نسبت $\frac{c}{a}$ وبزرگتر از یك است **خروج ازمرکز** هذلولی میگویند.

چون محور y'y محور تقارن هذلولی است واضح است که خط D' قرینهٔ خط D نسبت‌به y'y نیز خطهادی نظیر کانون F' ازهذلولی میباشد

تمرین ـ اگر نقطهٔ F روی خط D واقع باشد مکان هندسی نقاطی مانند M که نسبت فاصلهٔ آنها از نقطهٔ F بفاصله‌شان از خط D مساوی عدد e باشد چیست ؟

۹۰۴ ـ ترسیم خطوط هادی بیضی وهذلولی ـ اگر (D) خط هادی نظیر کانون F از یك‌بیضی یا از یك هذلولی باشد وتصویر F را روی خط (D) نقطهٔ H بنامیم درشمارهٔ قبل دیدیم که چه درموردبیضی و چه درمورد هذلولی داریم :

$$\overline{OF}\times\overline{OH}=a^{2}$$ (a نصف طول محورکانونی است)

اما O مرکز دایرهٔ اصلی و a شعاع آنست ونظر بتعریف قطبی‌یك نقطه نسبت بیك‌دایره (شمارهٔ ٤٨٩ متمم‌مقالات‌سوم وچهارم) میتوان گفت:

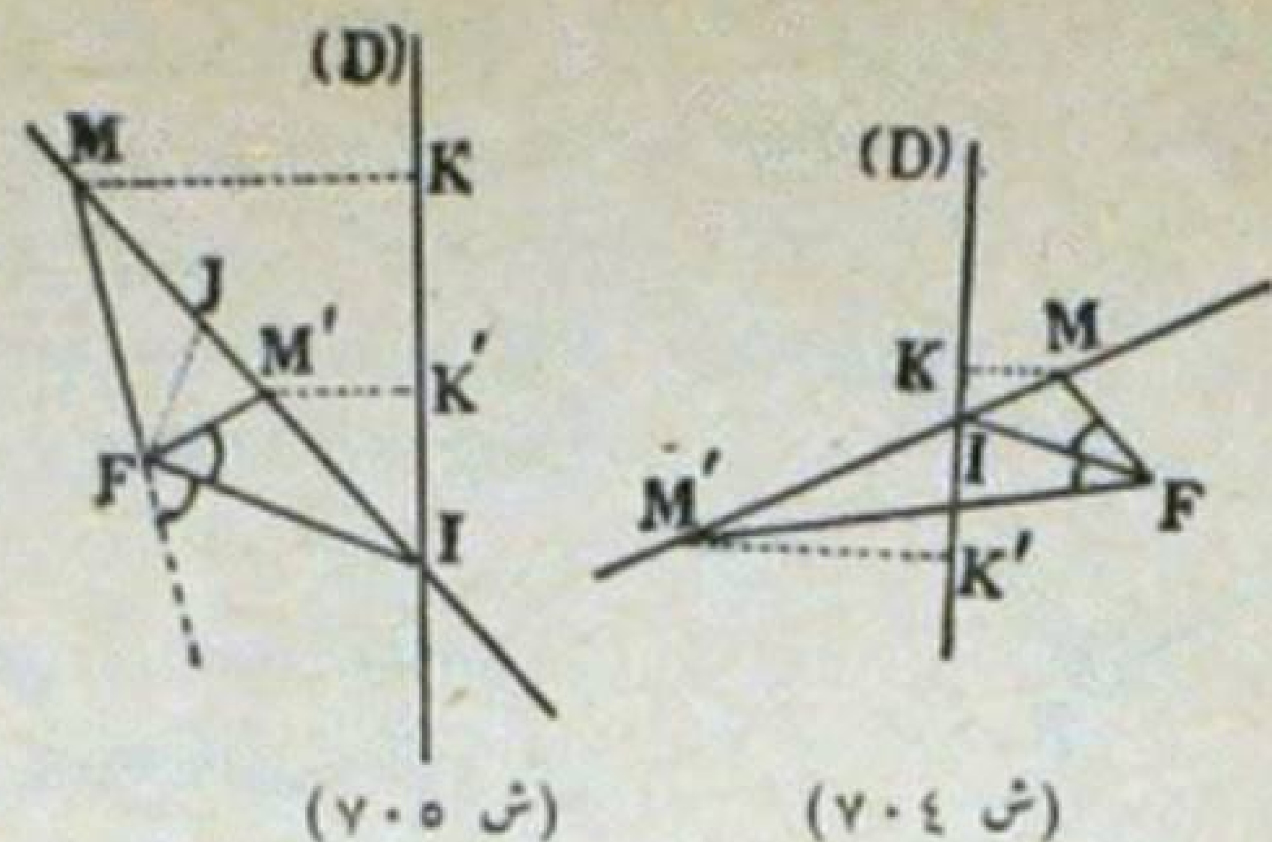
خط هادی نظیر یك کانون بیضی یا هذلولی عبارتست از قطبی آن‌کانون نسبت بدایرهٔ اصلی.

وازاینرو طریقهٔ ترسیم خطهادی نظیر یك کانون بیضی و یاهذلولی بدست میآید (شمارهٔ ٤٩٢ متمم مقالات سوم وچهارم)

تمرین ـ ثابت کنید که خطهادی نظیر یك کانون هذلولی از تصاویر همان کانون بردوخط مجانب میگذرد .

خاصیت‌های مشترك بیضی وهذلولی وسهمی

۹۰۵ ـ قضیه ـ هرگاه خط راستی یکی از مقطع‌های مخروطی‌را درنقاط M و M' وخط‌هادی‌نظیر کانون F متعلق بمقطع مزبور را در نقطهٔ I قطع کند خط راست FI یکی از خطوط نیمساز زوایای دوخط FM و FM' است.



(ش ٧٠٥) (ش ٧٠٤)

اگر خط هادی نظیر کانون F را (D) وتصاویر نقاط M و M' را روی خط (D) بترتیب نقاط K و K' بنامیم داریم :

$$\frac{M'F}{M'K'}=e \quad \text{و} \quad \frac{MF}{MK}=e$$

واز آنجا

$$\frac{MF}{M'F}=\frac{MK}{M'K'}$$

و چون تشابه مثلث‌های MIK و M'IK' را در نظر بگیریم نتیجه میشود :

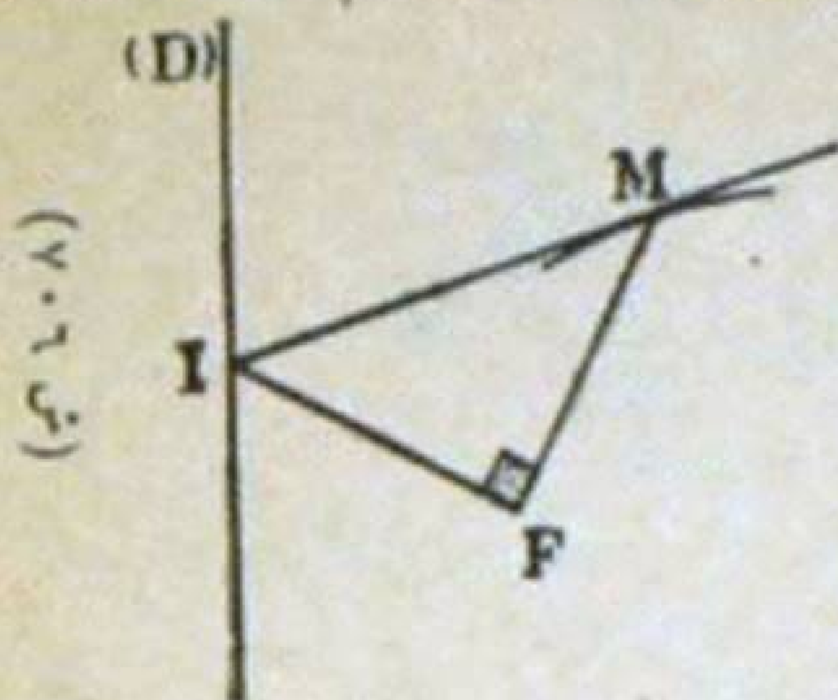
$$\frac{MF}{M'F}=\frac{IM}{IM'}$$

ازاین تساوی معلوم میشود که اگر نقطهٔ I بین‌نقاط M و M' واقع باشد (ش ٧٠٤) FI نیمساز زاویه داخلی F از مثلث MFM' است واگر نقطهٔ I روی‌خط MM' خارج ازقطعه‌خط MM' واقع باشد (ش٧٠٥) FI نیمساز زاویهٔ خارجی F ازمثلث MFM' میباشد (شماره‌های ٢٨٢ و ٢٨٥ از مقالهٔ سوم)

تنها حالتی که نقطهٔ I بین نقاط M و M' واقع‌است یعنی نقاط M و M' در دوطرف خط هادی قرار دارند حالتی است که مقطع مخروطی هذلولی است و نقاط M و M' هردو روی یك‌شاخهٔ آن واقع نیستند در این‌حالت FI نیمساز داخلی‌زاویهٔ F ازمثلث MFM' است ودرجمیع‌حالات دیگر FI نیمساز زاویهٔ خارجی زاویهٔ F ازمثلث MFM' میباشد.

۹۰٦ ـ نتیجه ـ فرض کنیم نقاط M و M' دریك طرف خطهادی ومجاور یکدیگر واقع باشند. در اینصورت FI نیمساز زاویهٔ خارجی F از مثلث MFM' است (ش٧٠٥) حال‌اگر نقطهٔ M' روی‌منحنی حرکت کند و بنقطهٔ M نزدیك و بالاخره برآن منطبق شود در اینصورت خط

'MM برخط مماس در نقطهٔ M برمنحنی منطبق‌میشود و اگر پای نیمساز داخلی F از مثلث 'MFM را روی خط 'MM نقطهٔ J بنامیم نقطهٔ J نیز بر M منطبق میگردد و FI که همواره بر FJ عمود است بر FM عمود یعنی زاویهٔ IFM قائمه میشود پس :



(ش ۷۰۸)

قطعه‌ای از خط مماس بر هریك ازمقطع‌های مخروطی که بین نقطهٔ تماس وخط‌هادی (D) محصور باشد از کانون F که خط هادی (D) نظیر آنست بزاویهٔ قائمه دیده میشود.

تمرین ـ تحقیق کنید که اگر از نقطهٔ I واقع برخط هادی (D) دو مماس بریك‌مقطع مخروطی رسم کنیم ونقاط‌تماس آنهارا M و N بنامیم خط راست MN از کانون F که خط هادی (D) نظیر آنست میگذرد.

٥ ـ فصل مشترك سطح مخروطی دوار بایك صفحه

۹۰۷ ـ قضیهٔ داندلن☆ ـ اگر یك سطح مخروطی‌دوار را با صفحه‌ای که از رأس آن نگذرد و برمحور آن عمود نباشد قطع کنیم مقطع یك بیضی و یا یك هذلولی و یایك سهمی است☆☆.

محور سطح‌مخروطی‌دوار را SX مینامیم و صفحه‌ای را که از محور سطح مخروطی دوار بگذرد و برصفحهٔ قاطع‌عمودشود صفحهٔ شکل‌اختیار میکنیم. این‌صفحه سطح مخروطی دوار را در دومولد SU و SV و صفحهٔ قاطع را درخط راست P قطع میکند. اکنون سه‌حالت تمیز میدهیم :

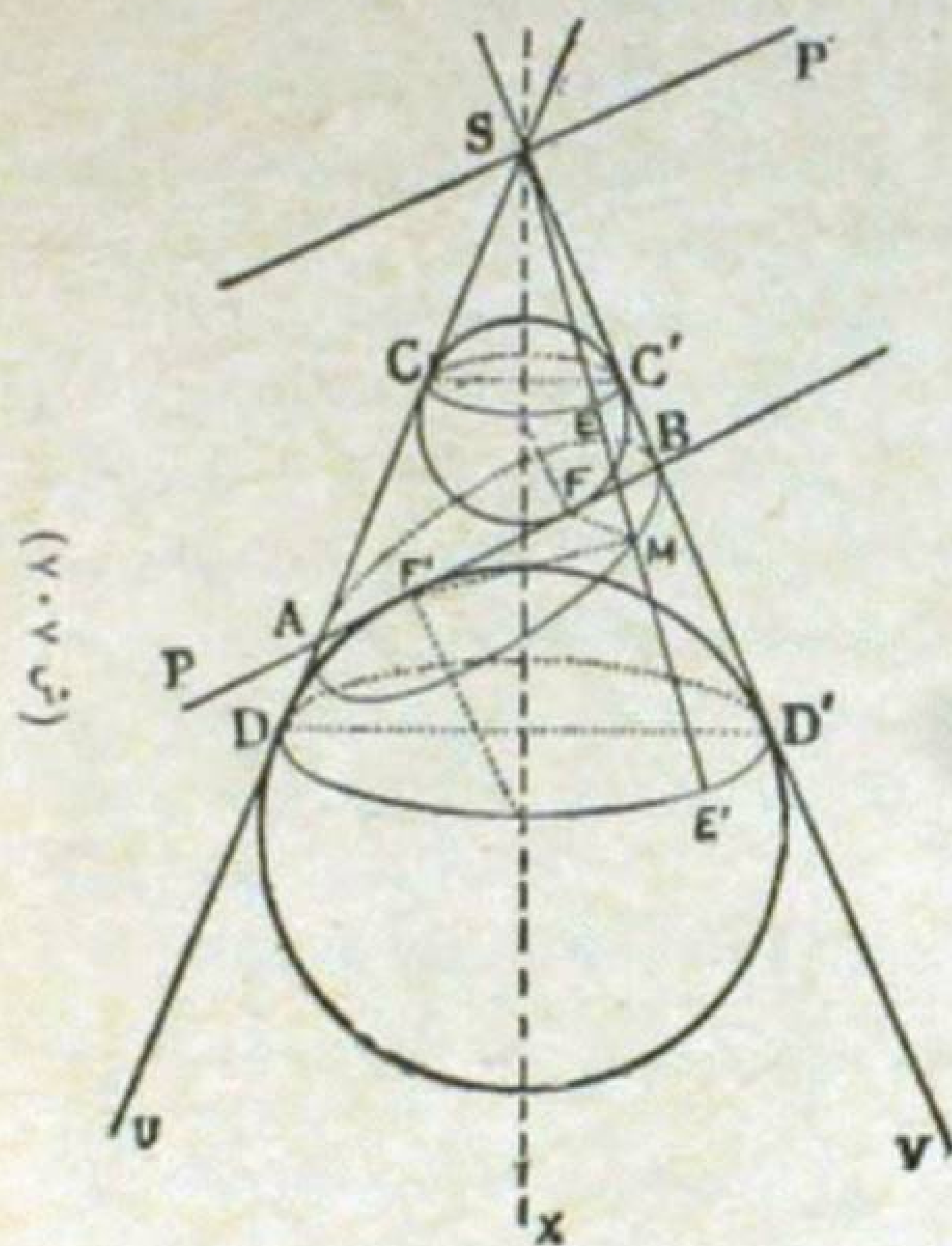
حالت اولـ خط P مولدهای SU و SVرا دردونقطهٔ A و B قطع میکندواین‌دونقطه هردو روی یك‌دامنهٔ‌سطح مخروطی قراردارند ☆☆☆.

در اینحالت مقطع یك‌بیضی است.

☆ Dandelin ☆ ☆ برای‌تعاریف وقضایای‌مربوط‌بسطح‌مخروطی بشماره‌های ۷۳۸ و ۷۳۹ و ۷٤۲ و ۷٤٥ تا ۷٤۸ مقالهٔ هفتم رجوع کنید.

☆ ☆ ☆ دراینحالت اگر خط 'SP را از رأس سطح مخروطی بموازات خط P رسم کنیم این‌خط درخارج زاویهٔ USV واقع خواهد شد (ش ۷۰۷)

دایرهٔ محاطی داخل مثلث SAB را رسم میکنیم و نقاط تماس آنرا باضلع AB نقطهٔ F و با اضلاع دیگر نقاط C و 'C مینامیم (ش ۷۰۷) و همچنین‌دایرهٔ‌محاطی‌خارج‌مثلث SAB واقع‌درزاویهٔ S را رسم میکنیم و نقاط تماس آنرا باضلع AB نقطهٔ 'F و با اضلاع دیگر نقاط D و 'D میخوانیم.



(ش ۷۰۷)

اگر خط SU و دو دایرهٔ مزبور را در حول‌محور SX دوران دهیم از دوران خط SU سطح مخروطی دوار مفروض و از دوران‌دو دایرهٔ‌مذکور دو کره تولیدمیشود و این دو کره درنقاط F و 'F با صفحهٔ قاطع مماسند و در سطح مخروطی محاط‌میباشند. دایره‌های تماس این دو کره با سطح مخروطی دو دایرهٔ صغیره هستند که قطرهاشان 'CC و 'DD میباشند واین دودایره‌را میتوان دومدار از سطح مخروطی دوار دانست.

حال اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث فرض کنیم چون دو کرهٔ محاطی در دوطرف صفحهٔ قاطع واقع میباشند نقطهٔ M روی سطح مخروطی مابین دومدار 'CC و 'DD قرار دارد.

فصل‌مشترك‌مولد SM را با دومدار 'CC و 'DD بترتیب نقاط E و 'E مینامیم. خط راست MF بر کره‌ای که از F میگذرد مماس است زیرا این‌خط درصفحهٔ‌مماس بر کرهٔ مزبور واقع است واز نقطهٔ تماس F میگذرد ونیز خط راست ME درنقطهٔ E برهمان کره مماس میباشد زیرا این خط

یکی از مولدهای سطح مخروطی است (شمارهٔ ۷۹۱ مقالهٔ هفتم) بنابراین داریم :

$$MF = ME \quad \text{و بهمین دلیل} \quad MF' = ME'$$

وچون M بین نقاط E و E' قرار دارد ازدو تساوی فوق نتیجه میشود:

$$MF + MF' = ME + ME' = EE'$$

اما EE' که قسمتی ازخط مولد است ومابین دومدار CC' و DD' محصور میباشد طولش ثابت و مساوی باطول CD است پس :

$$MF + MF' = CD = \text{طول ثابت}$$

بنابراین نقطهٔ M متعلق است بیك بیضی که درصفحهٔ قاطع واقع میباشد و کانونهایش نقاط F و F' هستند وچون این بیضی ناچار ازنقاط A و B میگذرد و این دو نقطه روی محور کانونی آن واقع هستند AB محوراطول این بیضی است. وقتی مولد SE سطح مخروطی دوار را بپیماید نقطهٔ M بیضی مزبور را طی خواهد کرد و قضیه دراین حالت ثابت است.

تمرین ـ تحقیق کنید که اگر از نقطهٔ B عمودی برمحور SX رسم کنیم و فصل مشترك آنرا با SU نقطهٔ B' بنامیم AB' مساوی با فاصلهٔ کانونی بیضی مقطع است.

حالت دوم ـ خط P مولدهای SU و SV را در دونقطهٔ A و B قطع میکند واین دو نقطه روی یك دامنهٔ سطح مخروطی واقع نیستند☆.

دراین حالت مقطع یك هذلولی است .

دایرهٔ محاطی خارج مثلث SAB را که درزاویهٔ B واقع است رسم میکنیم و نقاط تماس آنرا باخط AB نقطهٔ F و با خطوط SA و SB نقاط D و D' مینامیم (ش ۷۰۸) و همچنین دایرهٔ محاطی خارج مثلث SAB را که در زاویهٔ A واقع است رسم میکنیم ونقاط تماس آنرا باخط AB نقطهٔ F' وباخطوط SA و SB نقاط C و C' میخوانیم.

اگر خط SU و دو دایرهٔ مزبور را درحول محور SX دوران دهیم ازدوران خط SU سطح مخروطی دوار مفروض و ازدوران دودایرهٔ مذکور دو کره تولید میشود و این دو کره درنقاط F و F' باصفحهٔ قاطع مماسند و درسطح مخروطی محاط میباشد. دایرههای تماس این دو کره باسطح

☆ دراینحالت اگرخط SP' را بموازات خط P رسم کنیم نیمی ازاین خط در داخل زاویهٔ USV واقع خواهدشد (ش ۷۰۸)

(ش ۷۰۸)

مخروطی دودایرهٔ صغیره هستند که قطرهاشان CC' و DD' میباشند و این دو دایره را میتوان دو مدار از سطح مخروطی دوار دانست.

حال اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث و روی شاخهای که از A میگذرد فرض کنیم چوندو کرهٔ محاطی دریك طرف صفحهٔ قاطع واقع میباشند نقطهٔ M روی سطح مخروطی درخارج قسمتی که بین دومدار CC' و DD' محصور است واقع میباشد. فصل مشترك مولد SM را بادومدار CC'

و DD' بترتیب نقاط E و E' مینامیم. بهمان دلیل که درحالت اول گفتیم داریم $MF' = ME$ و $MF = ME'$

وچون نقطهٔ M خارج از قطعه‌خط EE' قراردارد ازدوتساوی فوق نتیجه میشود :

$$MF' - MF = ME - ME' = EE'$$

اما EE' که‌قسمتی ازخط مولد است و مابین دومدار CC' و DD' محصور میباشد طولش ثابت ومساوی‌با طول CD است.

پس $$MF' - MF = CD$$

اگر بجای نقطهٔ M نقطهٔ M' را روی شاخه‌ای که از B میگذرد اختیار کنیم حاصل میشود:

$$M'F - M'F' = CD = \text{طول ثابت}$$

بنابراین نقاط M و M' متعلق هستند بیك‌هذلولی که درصفحهٔ قاطع واقع میباشد و کانونهایش نقاط F و F' هستند وچون این‌هذلولی ناچار ازنقاط A و B میگذرد واین دونقطه روی محور کانونی آن واقع هستند AB محور کانونی این هذلولی است . وقتی مولد SE سطح مخروطی را بپیماید نقاط M و M' هذلولی مزبور راطی خواهند کرد و قضیه در اینحالت نیز ثابت است .

تمرین - تحقیق کنید که اگر از نقطهٔ B عمودی‌برمحور SX رسم کنیم‌وفصل‌مشترك‌آنرا با SU نقطهٔ B' بنامیم AB' مساوی‌با فاصلهٔ‌کانونی هذلولی مقطع است.

حالت سوم - خط P با یکی‌از مولدهای SU و SV مثلا با SU موازیست و مولد SV را درنقطهٔ A قطع میکند. در اینحالت مقطع یك سهمی است .

دایره‌ای رسم میکنیم که مرکزش روی محور SX واقع باشد و با سه‌خط راست SU و SVوAP مماس شود و نقاط تماس این دایره را با سه‌خط مزبور بترتیب C' و C و F مینامیم (ش۷۰۹) وفصل‌مشترك خطوط CC' و P را نقطهٔ H میخوانیم .

اگر خط SU و دایرهٔ مزبور را حول محور SX دوران دهیم از دوران‌خطSU سطح مخروطی‌دوارمفروض وازدوران دایرهٔمذکوریك کره تولید میشود و این کره درنقطهٔ F با صفحهٔ قاطع مماس است و در سطح

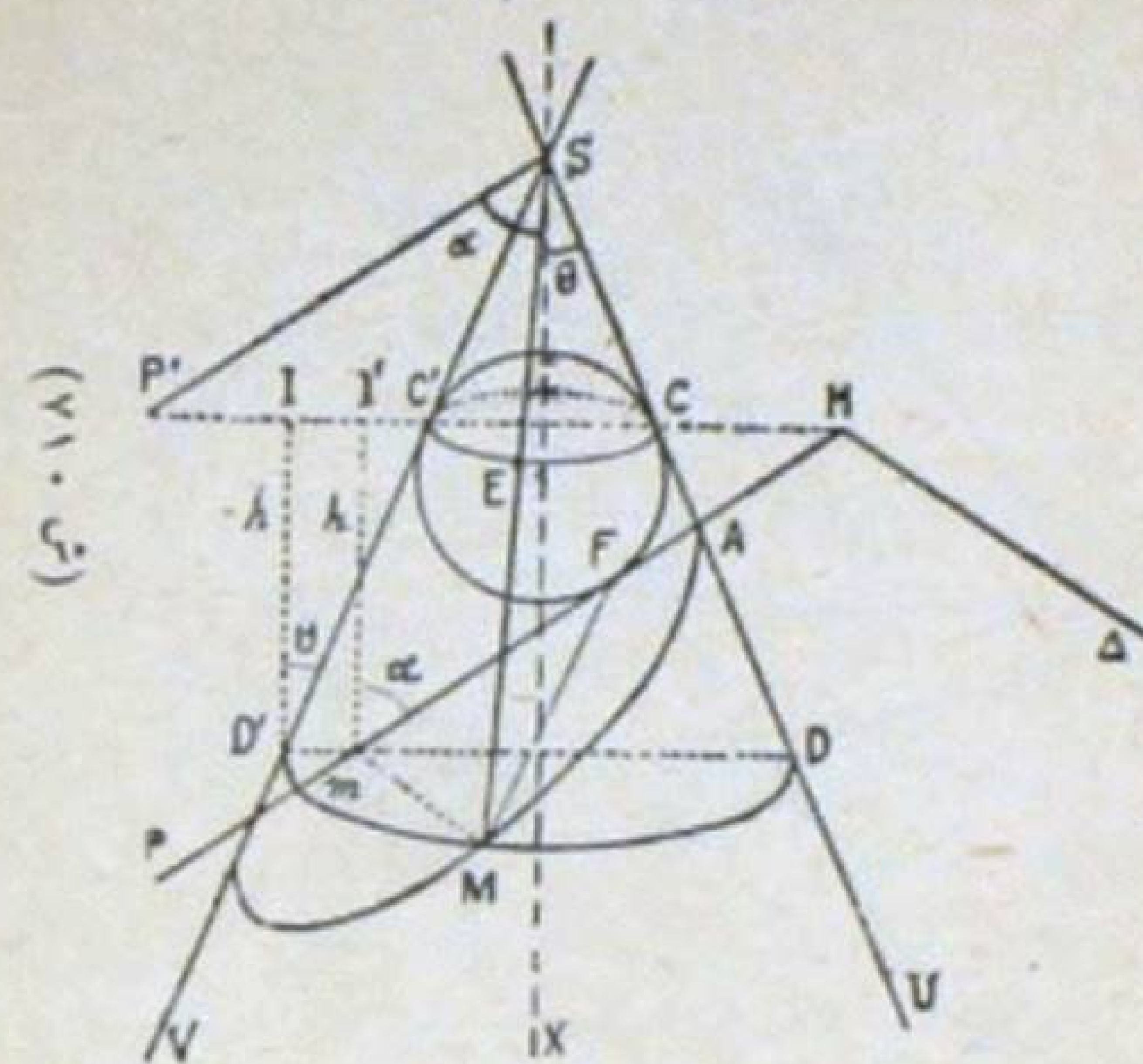
(ش ۷۰۹)

مخروطی محاط میباشد. دایرهٔ تماس این کره باسطح مخروطی یك دایرهٔ صغیره است که قطرش CC' میباشد و این دایره را میتوان یك‌مدار سطح مخروطی دوار دانست. صفحهٔ این مدار صفحهٔ‌قاطع‌را درخط Δ که‌درنقطهٔ H برصفحهٔ USV عمود است قطع میکند.

حال اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث فرض کنیم وفصل مشترك مولد SM را با مدار CC' نقطهٔ E بنامیم بهمان دلیل که درحالت اول گفتیم داریم $MF = ME$. تصویر نقطهٔ M را روی خط AP نقطهٔ m مینامیم. Mm با Δ موازیست و اگر مداری از سطح مخروطی راکه از نقطهٔ M میگذرد رسم کنیم قطری از آن که در صفحهٔ USV واقع است عمودیست که از m بر SX رسم شود . فصل مشترکهای این عمود را با SU و SV نقاط D' وD مینامیم. واضح‌است که $ME = CD = C'D'$ و در متوازی‌الاضلاع $C'D'mH$ داریم $C'D' = mH$ پس $MF = mH$

اما mH مساویست‌بافاصلهٔ‌نقطهٔ M ازخط Δ بنابراین‌نقطهٔ M متعلق است بیك سهمی که درصفحهٔ قاطع واقع میباشد و کانونش نقطهٔ F و خط هادیش Δ است . وقتی مولد SE سطح‌مخروطی‌را بپیماید نقطهٔ M سهمی مزبور را طی میکند.

۹۰۸ - خطوط هادی مقطع‌های مخروطی - در استدلالی که درحالت سوم شمارهٔ قبل بیان کردیم خطهادی سهمی را بکار بردیم، میتوان این استدلال را در دوحالت دیگر نیز تعمیم داد :



(ش ۷۱۰)

همانطور که درشماره‌های قبل گفتیم یك سطح مخروطی دوار را در نظر میگیریم ومحور آنرا SX مینامیم. صفحه‌ای که ازمحور SX بگذرد این سطح مخروطی را درمولدهای SU و SV قطع میکند. این صفحه را صفحهٔ شکل اختیار میکنیم و فصل‌مشترك صفحهٔ قاطع را با این صفحه خط P مینامیم . ازنقطهٔ S خط SP' را بموازات P رسم میکنیم وزاویهٔ P'SX را که مساوی با زاویهٔ محور SX با صفحهٔ قاطع است α ونیم زاویهٔ رأس سطح مخروطی‌دوار یعنی زاویهٔ XSU را θ مینامیم.

دایره‌ای رسم میکنیم که مرکزش روی محور SX واقع باشد و با خطوط SU و SV و P بترتیب در نقاطی مانند C و C' و F مماس شود و فصل‌مشترك خط CC' را باخط P نقطهٔ H مینامیم.

از دوران خط SU و دایرهٔ مرسوم درحول محور SX بترتیب سطح مخروطی دوارمفروض‌ویك کرهٔ‌محاط‌در آن‌تولیدمیشودواین کره‌درنقطهٔF با صفحهٔ قاطع مماس است و دایرهٔ تماس سطح مخروطی با کرهٔ‌محاط در آن مدار CC' از سطح مخروطی است. صفحهٔ این‌مدار صفحهٔ قاطع را درخط راستی مانند Δ که از نقطهٔ H میگذرد و برصفحهٔ USV عمود است قطع میکند.

اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث فرض کنیم و فصل‌مشترك مولد SM را بامدار CC' نقطهٔ E بنامیم همانطور که قبلا دیدیم :

$$MF = ME$$

اکنون مداری را که از نقطهٔ M میگذرد در نظر میگیریم و فصل مشترکهای آنرا با SU و SV نقاط D و D' مینامیم و فرض میکنیم نقطهٔ m تصویر نقطهٔ M روی خط P باشد خط Mm باخط Δ موازیست ونقطهٔ m روی خط DD' نیز واقع است وداریم :

$$MF = ME = C'D' = CD$$

بنابراین اگر از نقاط m و D' عمودهای mI' و D'I را بر خط CC' فرود آوریم وطول مشترك این عمودها را h بنامیم در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ D'IC' و mI'H که یك‌زاویهٔ حاده ازاولی مساوی‌با θ ویك زاویهٔ حاده از دومی مساوی‌با α است (ش۷۱۰) داریم :

$$mH = \frac{h}{\cos\alpha} \quad \text{و} \quad C'D' = \frac{h}{\cos\theta} = MF$$

از اینرو نتیجه میشود :

$$\frac{MF}{mH} = \frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$$

وچون mH مساوی‌با فاصلهٔ نقطهٔ M ازخط Δ است از رابطهٔ اخیر معلوم میشود که نقطهٔ M روی یك مقطع مخروطی واقع‌است که نقطهٔ F کانون آن و خط Δ خطهادی نظیرکانون F از آن میباشد.

بحث - اگر α بزرگتراز θ باشد $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ ازیك کوچکتر ومقطع بیضی است در اینصورت صفحه‌ای که ازخط SP' بگذرد و برصفحهٔ USV عمود باشد سطح مخروطی را قطع نمیکند.

اگر α مساوی‌با θ باشد. $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ مساوی با یك است و مقطع سهمی‌است.

اگر α کوچکتراز θ باشد $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ ازیك بزرگتراست و مقطع‌یك هذلولی است. دراینصورت صفحه‌ای که ازخط SP' بگذرد وبرصفحهٔ USV عمود باشد سطح مخروطی را قطع خواهد کرد.

۹۰۹ - فصل‌مشترك سطح استوانه‌ای دوار با يك صفحه

قضيه - فصل‌مشترك يك‌سطح استوانه‌ای دوار باصفحه‌ای كه نه با محور آن موازی و نه بر محور آن عمود باشد يك يضی است.

صفحه‌ای را كه از محور سطح استوانه‌ای دوار بگذرد و بر صفحهٔ قاطع عمود باشد صفحهٔ شكل اختيار ميكنيم اين صفحه سطح استوانه‌ای دوار را دردومولد U و V وصفحهٔ قاطع را درخطراست P قطع‌ميكند (ش۷۱۱) فصل‌مشترکهای خط P را بامولدهای U و V بترتيب A و B مينامیم.

(ش۷۱۱)

دو دايره ميتوان رسم كرد كه با سه خط U و V و P مماس باشند. نقاط تماس اين دو دايره را باخط P نقاط F و F' و با مولد U نقاط C و D و بامولد V نقاط C' و D' مینامیم.

اگر خط U و دودايرهٔ مرسوم راحول محورسطح‌استوانه‌ای دوران دهيم از دوران U سطح استوانه‌ای دوار واز دوران دو دايره دو كره توليد ميشود واين‌دو كره كه درسطح استوانه‌ای دوار محاط‌هستند باصفحهٔ قاطع درنقاط F و F' مماس ميباشند. دواير تماس دو كرهٔ مزبور باسطح استوانه‌ای دوار دودايره بقطرهای CC' و DD' هستند و اين دو دايره را ميتوان دومدار از سطح استوانه‌ای دوار دانست.

حال اگر نقطهٔ M را متعلق بمقطع مورد بحث فرض كنيم چون دو كرهٔ محاطی در دوطرف صفحهٔ قاطع واقع ميباشند نقطهٔ M روی سطح استوانه‌ای ما بين دومدار CC' و DD' قرار دارد.

فصل‌مشترك مولدی را كه از نقطهٔ M ميگذرد با دو مدار CC' و DD' بترتيب‌نقاط E و E' مينامیم. خطراست MF بر كره‌ای كه‌از F ميگذرد

مماس است زيرا اين‌خط درصفحهٔ مماس بر كرهٔ مزبور واقع‌است واز نقطهٔ تماس F ميگذرد و همچنين خطراست ME در نقطهٔ E برهمان كره‌مماس ميباشد زيرا اين‌خط يكی از مولدهای سطح استوانه‌ايست (شمارهٔ ۷۹۴ مقالهٔ هفتم) بنابراين داريم :

$$MF = ME \qquad \text{و بهمين‌دليل} \qquad MF' = ME'$$

و چون M مابين نقاط E و E' قرار دارد از دو تساوی فوق نتيجه ميشود :

$$MF + MF' = ME + ME' = EE'$$

اما EE' كه قسمتی از خط مولداست ومابين دومدار CC' و DD' محصور ميباشد طولش ثابت و مساوی‌با طول CD است پس

$$MF + MF' = CD = \text{طول‌ثابت}$$

بنابراين نقطهٔ M متعلق است بيك يضی كه در صفحهٔ قاطع واقع ميباشد و كانونهايش نقاط F و F' هستند و چون اين يضی ناچار از نقاط A و B ميگذرد و اين دو نقطه روی محور كانونی آن واقع هستند AB محور اطول اين يضی است. وقتی مولد EE' سطح استوانه‌ای دوار را بپيمايد نقطهٔ M يضی مزبور را طی خواهد كرد.

تمرين- تحقيق كنيد كه اگراز نقطهٔ B عمودی برمحور $X'X$ رسم كنيم و فصل‌مشترك آنرا با خط U نقطهٔ B' بناميم BB' مساوی‌با محور اقصر يضی مقطع است.

مسائل مقاله هشتم

بیضی

یک بیضی بامعلومات زیر معین کنید. (یعنی کانونها وطول محور کانونی آنرا پیدا کنید)

۱ ـ دوکانون و یک مماس .

۲ ـ یک کانون و سه مماس .

۳ ـ یک کانون و دومماس ونقطهٔ تماس یکی از آنها .

۴ ـ یک کانون و یک رأس و یک مماس .

۵ ـ رأسهای یک محور و یک نقطه .

۶ ـ رأسهای یک محور و یک مماس .

۷ ـ محملهای دومحور و دو نقطه .

۸ ـ دومماس و مرکز و طول $2a$

۹ ـ یک کانون و یک نقطه و طولهای $2a$ و $2b$

۱۰ ـ یک رأس از محور اطول و یک کانون و یک مماس .

۱۱ ـ یک کانون و دومماس و یک نقطه .

۱۲ ـ یک کانون و یک مماس و دو نقطه .

۱۳ ـ یک کانون و سه نقطه .

۱۴ ـ یک رأس از محور اقصر و یک کانون و یک مماس.

۱۵ ـ یک رأس از محور اقصر و یک کانون و یک نقطه .

۱۶ ـ یک مماس متحرک بربیضی رسم میکنیم تا دو مماس ثابت برآنرا در نقاط M و M' قطع کند. ثابت کنیدکه قطعه خط MM' از یک کانون بیضی بزاویهٔ ثابتی دیده میشود .

۱۷ ـ یک کانون از بیضی (E) ثابت است و این بیضی از یک نقطهٔ ثابت

میگذرد و در این نقطه بریک خط ثابت مماس است. مکان هندسی کانون دیگر آنرا معین کنید.

۱۸ ـ یک کانون از بیضی (E) ثابت است و این بیضی با دو خط ثابت مماس میباشد مکان هندسی مرکز آنرا تعیین کنید.

۱۹ ـ یک کانون از بیضی (E) ثابت است و این بیضی از یک نقطهٔ ثابت میگذرد و با یک خط ثابت مماس است مکان هندسی کانون دیگر آنرا تعیین کنید .

۲۰ ـ یک خط مماس بریک بیضی مماسهایی راکه در رأسهای محور اطول برآن رسم شوند در نقاط M و M' قطع میکند. ثابت کنیدکه دایرهٔ بقطر MM' از دوکانون بیضی میگذرد.

۲۱ ـ سه نقطهٔ A و B و C روی یک خط راست واقعند و C بین A و B قرار دارد . دایره متغیری در نقطهٔ A برخط ABC مماس است و مماسهاییکه از نقاط B و C براین دایره رسم میشوند یکدیگر را در نقطهٔ M قطع میکنند مطلوبست تعیین مکان هندسی نقطهٔ M .

هذلولی

یک هذلولی بامعلومات زیر معین کنید. (یعنی کانونها و طول محورکانونی آنرا پیدا کنید).

۲۲ ـ دوکانون و یک مماس .

۲۳ ـ یک کانون و سه مماس .

۲۴ ـ یک کانون و دومماس و نقطهٔ تماس یکی از آنها.

۲۵ ـ یک کانون و یک رأس و یک مماس .

۲۶ ـ رأسها و یک نقطه .

۲۷ ـ رأسها و یک مماس .

۲۸ ـ دومماس و مرکز و طول $2a$

۲۹ ـ دوکانون و راستای یک خط مجانب .

۳۰ ـ یک کانون و یک خط مجانب و طول $2a$

۳۱ ـ دوخط مجانب و طول $2a$ و طول $2c$.

۳۲ ـ یک کانون و یک خط مجانب و یک مماس .

۳۳ ـ نسبت $\frac{c}{a}$ و یک رأس و یک خط مجانب .

۳۴ – یك کانون و یك مماس و دو نقطه .

۳۵ – یك کانون و دو مماس و یك نقطه .

۳۶ – یك کانون و سه نقطه .

۳۷ – یك کانون و یك نقطه و طولهای a و b

۳۸ – مطلوبست مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که با دو دایرهٔ معلو مماس باشند .

۳۹ – یك مماس متحرك بریك هذلولی رسم میکنیم تا دو مماس ثابت برآنرا در نقاط M و M' قطع کند ثابت کنید که قطعه خط MM' از یك کانون هذلولی بزاویهٔ ثابتی دیده میشود .

۴۰ – یك کانون از هذلولی (H) ثابت است واین هذلولی بادوخط ثابت مماس میباشد. مکان هندسی کانون دیگر و مرکز آنرا معین کنید.

۴۱ – یك کانون از هذلولی (H) ثابت است و این هذلولی از دو نقطهٔ ثابت میگذرد مکان هندسی کانون دیگر و مرکز آنرا معین کنید.

۴۲ – سه نقطهٔ A و B و C روی یك خط راست واقعند و نقطهٔ B بین نقاط A و C قرار دارد . دایرهٔ متغیری در نقطهٔ B با خط AdC مماس است و مماسهاییکه از نقاط A و C براین دایره رسم میشوند یکدیگر را در نقطهٔ M قطع میکنند. مطلوبست تعیین مکان هندسی نقطهٔ M.

سهمی

یك سهمی با معلومات زیر معین کنید (یعنی کانون وخط هادی آنرا پیدا کنید).

۴۳ – کانون و دو نقطه .

۴۴ – کانون و دو مماس

۴۵ – کانون و یك مماس و نقطهٔ تماس آن .

۴۶ – خط هادی و دو نقطه .

۴۷ – خط هادی و دو مماس .

۴۸ – خط هادی و یك مماس و یك نقطه .

۴۹ – خط هادی و یك مماس و نقطهٔ تماس آن .

۵۰ – کانون و یك نقطه و یك مماس .

۵۱ – مماس در رأس و دو مماس دیگر.

۵۲ – مماس در رأس و یك نقطه و مماس درآن نقطه .

۵۳ – دو مماس و نقاط تماس آنها .

۵۴ – رأس و نقطه‌ای که مماس درآن برسهمی بامحور زاویهٔ ۴۵ درجه تشکیل میدهد.

۵۵ – مطلوبست تعیین مکان هندسی مراکز دایره‌هاییکه بایك خط راست و با یك دایره مماس باشند.

۵۶ – مطلوبست تعیین مکان هندسی نقاطی که تفاضل فواصلشان از یك نقطهٔ معلوم و از یك خط راست معلوم مساوی مقدار مفروضی باشد .

۵۷ – خط هادی یك سهمی ثابت است و این سهمی از نقطهٔ ثابت معلومی میگذرد مکان هندسی کانون آنرا معین کنید.

۵۸ – مکان هندسی رأس سهمی مسئلهٔ ۵۷ را تعیین کنید .

۵۹ – مکان هندسی کانونهای سهمی‌هایی راکه خط هادی آنها ثابت است و با یك خط ثابت مماس میباشند تعیین کنید.

۶۰ – مکان هندسی رأسهای سهمی‌های مسئلهٔ ۵۹ را تعیین کنید .

مقالهٔ نهم

حاملها

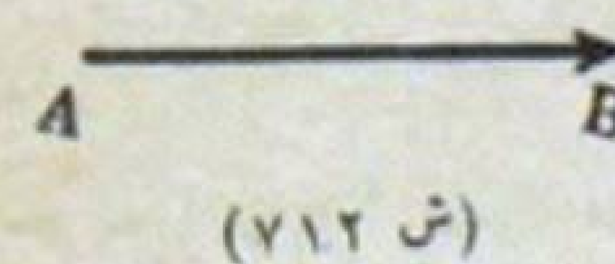
۱ - یادآوری تعاریف

۹۱۰ - تعاریفی را که در متمم مقالات اول و دوم و سوم و چهارم دیده‌ایم در اینجا یادآوری و کامل میکنیم :

محور خط راست نامحدودیست که روی آن جهت حرکت در نظر گرفته باشیم.

حامل قطعه خطی است که روی آن جهت حرکت در نظر گرفته باشیم.

وقتی از حامل $\overrightarrow{AB}$ گفتگو میکنیم جهت حرکت از A بطرف B را جهت حامل اختیار کرده‌ایم و نقطهٔ A **مبدأ** و نقطهٔ B **منتهای** حامل $\overrightarrow{AB}$ است (ش ۷۱۲) طول قطعه‌خط AB را **طول** حامل $\overrightarrow{AB}$ میگویند. خط راست نامحدود AB را **محمل** حامل $\overrightarrow{AB}$ مینامند. گاهی یک حامل را فقط با یک حرف مینمایانند : $\overrightarrow{V}$



(ش ۷۱۲)

واضح است که اگر مبدأ و منتهای یک حامل معلوم باشند آن حامل معین است و نیز میتوان برای تعیین یک حامل مبدأ و محمل وجهت و طول آنرا معین کرد.

اندازهٔ جبری یک حامل روی یک محور - هر گاه یک حامل مانند $\overrightarrow{AB}$ و یک محور مانند x'x را که بر AB منطبق و یا باآن موازی باشد درنظر بگیریم :

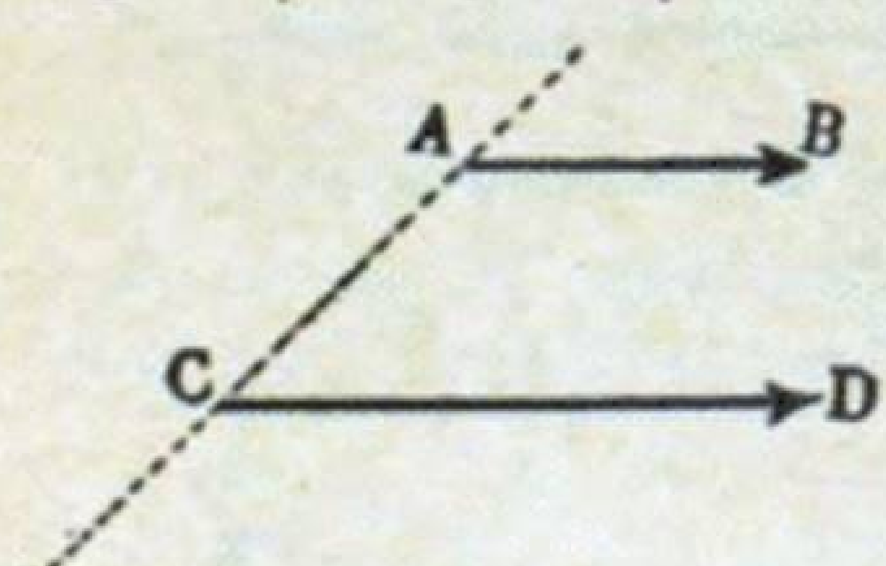
اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ روی محور x'x عددیست جبری که قدر مطلق آن طول حامل AB و علامت آن مثبت و یا منفی است برحسب آنکه حامل $\overrightarrow{AB}$ با محور x'x متحدالجهت و یا مختلف‌الجهت باشد.

اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ را با علامت قراردادی $\overline{AB}$ نشان میدهند. میتوان حالتی را که نقطهٔ A بر نقطهٔ B منطبق شود درنظر گرفت. دراینصورت میگویند حامل $\overrightarrow{AB}$ صفر است.

هر گاه محمل‌های دو حامل برهم منطبق یا باهم موازی باشند میگویند که راستای آن دو حامل یکی است.

اگر راستای دو حامل یکی باشد آندو حامل یا متحدالجهت هستند و یا مختلف‌الجهت :

اگر محمل‌های دو حامل برهم منطبق باشند در صورتی آندو حامل را **متحدالجهت** میگویند که اندازه‌های جبری آنها متحدالعلامه باشند و اگر محمل‌های دو حامل باهم موازی باشند در صورتی آندو حامل را **متحدالجهت** میگویند که هردو در یک طرف خط راستی که از دو مبدأ آنها میگذرد واقع باشند (ش ۷۱۳) قبول میکنیم که در اینحالت دوحامل دریک‌طرف هرصفحه‌ای که از دو مبدأ آنها بگذرد واقع هستند (البته غیراز صفحه‌ای که دو حامل در آن قراردارند).



(ش ۷۱۳)

طول یک نقطهٔ متعلق بیک محور - روی محور x'x نقطه‌ای را مانند O بعنوان مبدأ اختیار میکنیم. اگر نقطه‌ای مانند M روی محور x'Ox واقع باشد عدد جبری $\overline{OM}$ یعنی اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OM}$ را **طول** نقطهٔ M مینامند.

رابطهٔ شال (Chasles) - اگر نقاط A و B و C و . . . . و K و L روی یك محور واقع باشند بازای جمیع اوضاع نسبی این نقاط رابطهٔ زیر که برابطهٔ شال موسوم است برقرار میباشد (شمارهٔ ۲۰۹ متمم مقالات اول و دوم)

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\dots+\overline{KL}=\overline{AL}$$

اندازهٔ جبری یك حامل برحسب طولهای مبدأ و منتهای آن-

اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ روی محور $x'Ox$ واقع باشد داریم:

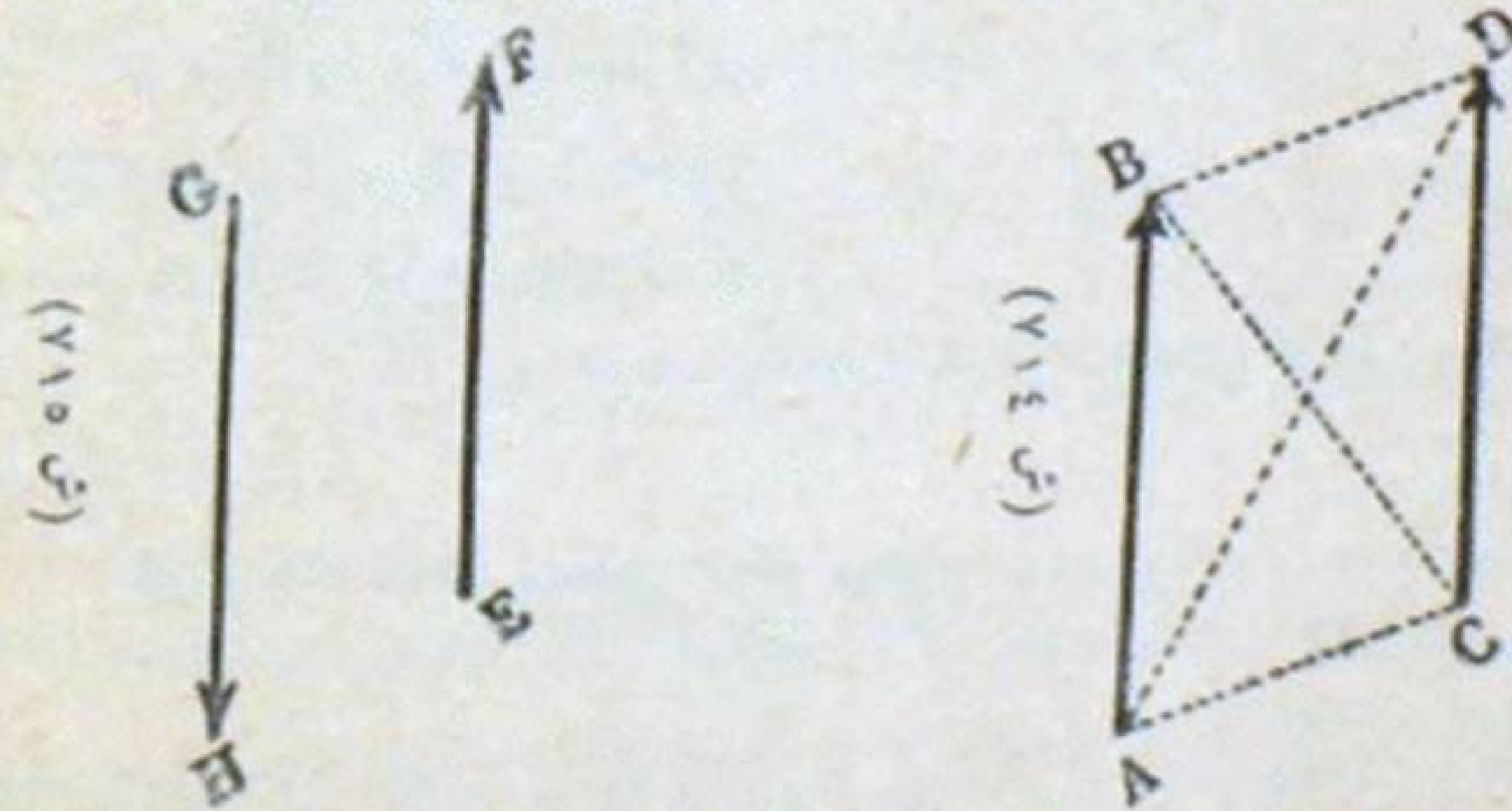
$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

یعنی: اندازهٔ جبری هرحامل مساویست با طول منتهای آن منهای طول مبدأش (شمارهٔ ۲۱۰ متمم مقالات اول دوم)

۹۱۱ - حاملهای همسنگ - دوحامل‌را همسنگ مینامند درصورتیکه هردو دارای یك‌راستا و یك طول ومتحدالجهت باشند (ش ۷۱۴)

اگر دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشند اولا چهار ضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است و ثانیاً حاملهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ همسنگ هستند وثالثاً اوساط قطعه‌خطهای AD و BC برهم منطبق میباشند.

هریك ازاین سه‌خاصیت ویژهٔ حاملهای‌همسنگ‌است. یعنی اگریکی ازاین سه‌خاصیت برقرار باشد حاملهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ هستند - دو خاصیت اخیر اگر حاملهای AB و CD روی یك محمل واقع باشند نیز برقرار است. (شکل‌را درحالات مختلف رسم واین‌موضوع‌را تحقیق کنید)



اگر دوحامل باحامل‌سومی همسنگ باشند خودشان همسنگ‌هستند.

۹۱۲ - حاملهای متقابل - دوحامل‌را متقابل مینامند درصورتیکه هردو دارای یك‌راستا و یك‌طول اما مختلف‌الجهت باشند (ش ۷۱۵) اگر دوحامل متقابل روی یك‌محور واقع‌باشند میگویند که آن دوحامل مستقیماً متقابل هستند.

۹۱۳ - حاملهای متساوی - حاملها برای نمایاندن کمیت‌های متفاوتی بکار میروند و برحسب نوع این کمیت‌ها انواع مختلفی ازحاملها درنظر میگیرند. اختلاف نوع حاملها مربوط بتعریفی‌است که برای تساوی آنها میتوان اختیار کرد:

الف - اگر دوحامل‌را در صورتی متساوی بنامیم که برهم منطبق باشند در اینصورت حاملها را **مقید** میخوانند.

ب - اگر دوحامل را درصورتی متساوی بنامیم که همسنگ وروی یك‌محمل واقع باشند در اینصورت حاملها را **لغزان** مینامند.

ج - اگر دو حامل را درصورتی متساوی بنامیم که‌همسنگ باشند در اینصورت حاملها را **آزاد** میخوانند.

در این کتاب ما همواره حاملهای آزادرا مورد مطالعه قرارمیدهیم **یعنی دوحامل را در صورتیکه همسنگ باشند متساوی مینامیم**☆

وقتیکه میگوییم حامل آزاد $\overrightarrow{AB}$ مقصوداینست که بجای‌حامل $\overrightarrow{AB}$ میتوانیم هرحامل دیگری راکه با حامل AB همسنگ باشد اختیار کنیم.

برای آنکه بیان کنیم که دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ یعنی‌متساوی هستند مینویسیم:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ یا $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

حاصلضرب یك‌حامل و یك‌عدد جبری

۹۱۴ - تعریف - حاصلضرب‌حامل آزاد $\overrightarrow{AB}$ وعدد جبری m حامل آزادیست مانند $\overrightarrow{A'B'}$ بقسمیکه اولا راستای حامل $\overrightarrow{A'B'}$ باراستای حامل $\overrightarrow{AB}$ یکی باشد.

☆ پس اصطلاحات **همسنگ** و **متساوی** در این کتاب معادل یکدیگر هستند و میتوانیم یکی‌از آنها را بجای دیگری بکار بریم.

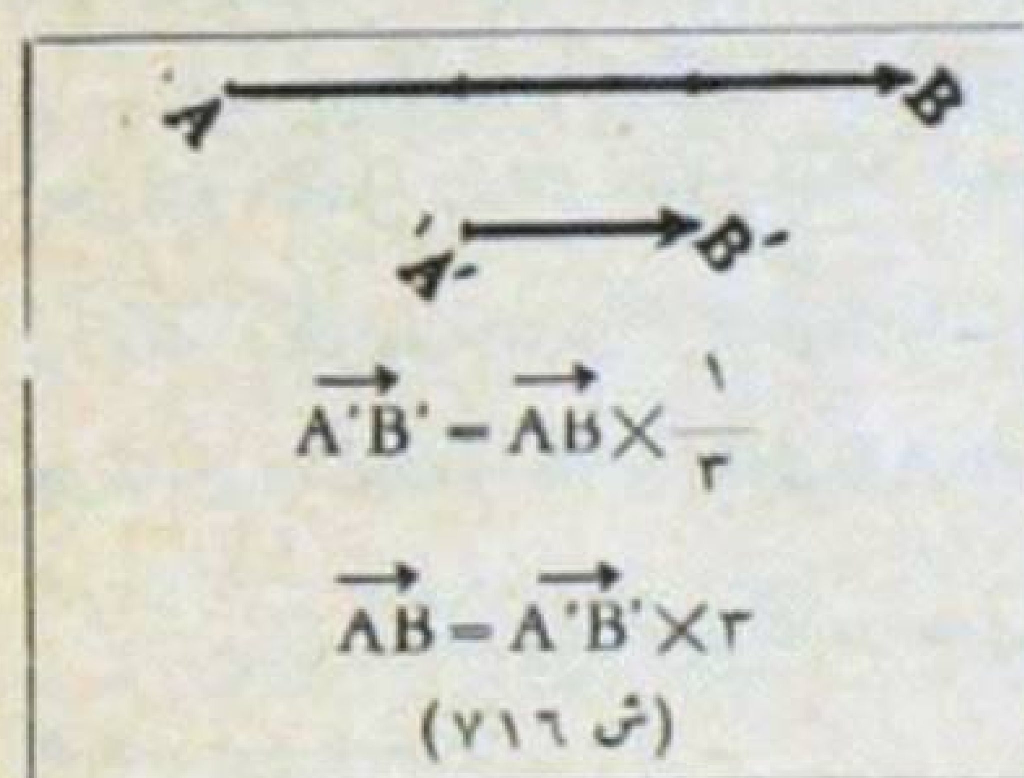
ثانیاً طول حامل $\overrightarrow{A'B'}$ مساوی باشد با طول حامل $\overrightarrow{AB}$ ضرب در قدرمطلق m یعنی $A'B' = |m| \times AB$

ثالثاً حاملهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ اگر m مثبت باشد متحدالجهت و اگر m منفی باشد مختلف‌الجهت باشند .

گاهی بجای آنکه بگویند حاصلضرب حامل $\overrightarrow{AB}$ و عدد جبری m میگویند حاصلضرب حامل $\overrightarrow{AB}$ درعدد جبری m و یا حاصلضرب عددجبری m درحامل $\overrightarrow{AB}$ ، برای رساندن آنکه حامل $\overrightarrow{A'B'}$ حاصلضرب حامل $\overrightarrow{AB}$ و عدد جبری m است مینویسند :

$$\overrightarrow{A'B'} = m\times\overrightarrow{AB} \qquad \text{و یا} \qquad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}\times m$$

اگر m صفر باشد حامل $\overrightarrow{A'B'}$ صفر است . برعکس هرگاه دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ را که راستاشان یکی باشد در نظر بگیریم واضح است که میتوان☆ عددی جبری مانند m میتوان یافت بقسمیکه داشته باشیم :



(ش ۷۱۶)

$$\overrightarrow{A'B'} = m\times\overrightarrow{AB}$$

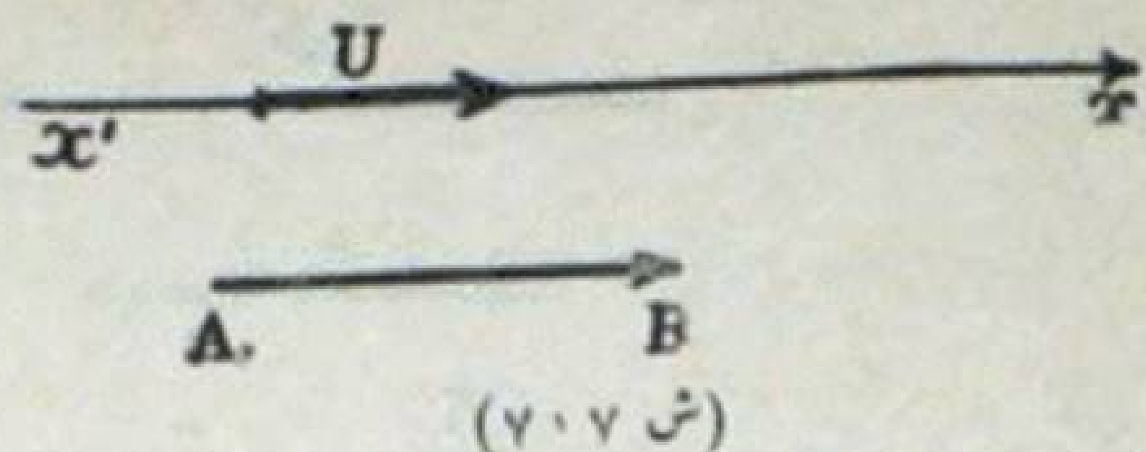
اگر m = −۱ باشد دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ متقابل خواهند بود و در اینصورت

$$\boxed{\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}}$$

اگر m = ۱ باشد دو حامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ همسنگ خواهند بود .

☆ بشرط آنکه $\overrightarrow{AB}$ صفر نباشد.

۹۱۵ ـ حامل واحد یك محور ـ هرحاملرا که روی محور x'x (یا روی محوری موازی با x'x و متحدالجهت با آن) واقع باشد و اندازهٔ جبریش مساوی با ۱+ باشد یك **حامل واحد محور x'x** مینامند .



(ش ۷۱۷)

اگر $\overrightarrow{U}$ یك حامل واحد محور x'x باشد وحامل $\overrightarrow{AB}$ را که محملش برمحور x'x منطبق و یا با آن موازیست درنظر بگیریم و اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ را روی محور x'x عدد m بنامیم (ش۷۱۷) نظر بآنچه گذشت داریم :

$$\overrightarrow{AB} = m\times\overrightarrow{U}$$

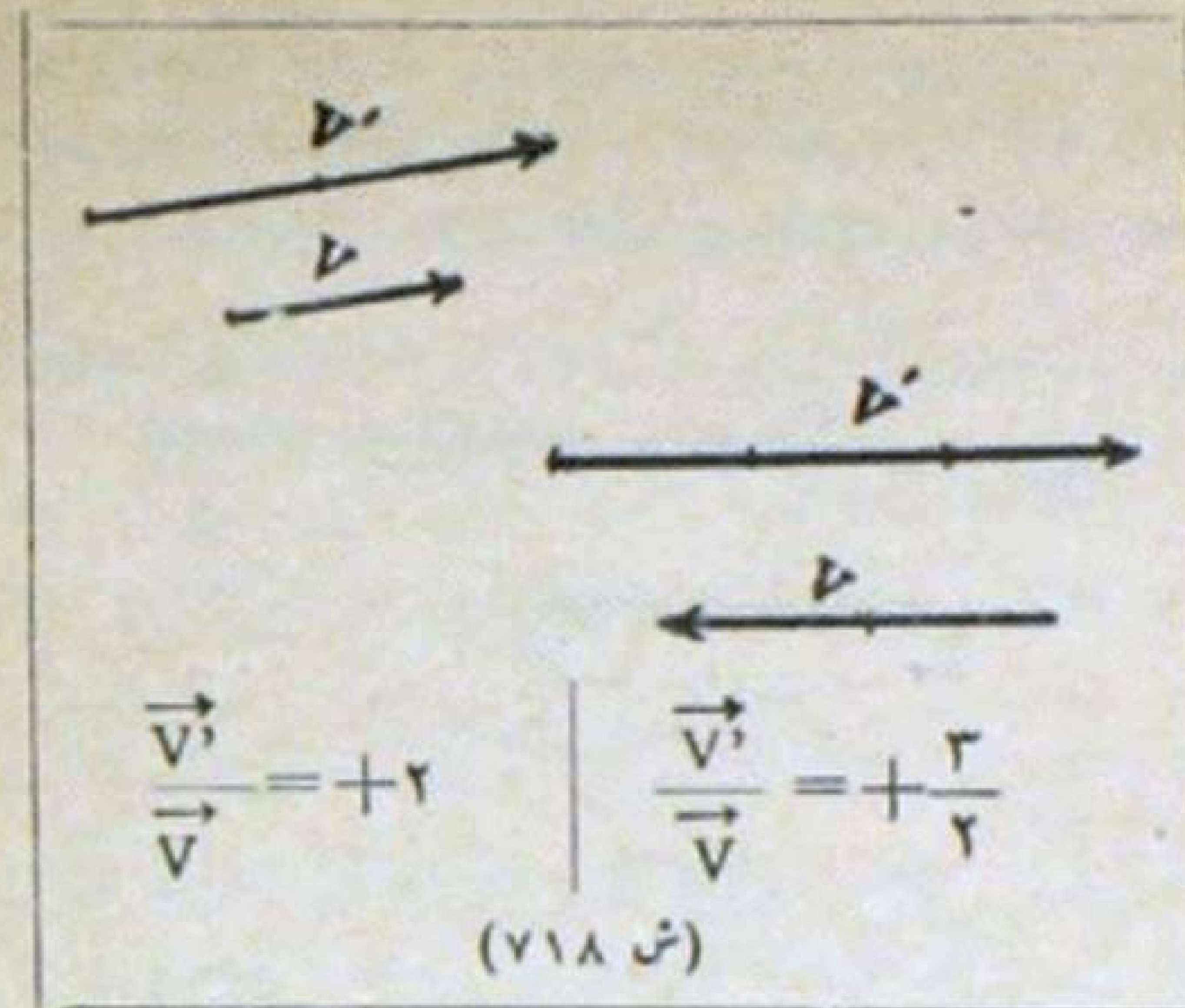
۹۱۶ ـ نسبت دوحامل ـ اگر حامل $\overrightarrow{V'}$ حاصلضرب حامل V و عدد جبری m باشد m را نسبت‌حامل $\overrightarrow{V'}$ بحامل $\overrightarrow{V}$ مینامند و مینویسند:

$$\frac{\overrightarrow{V'}}{\overrightarrow{V}} = m$$

ومیتوان گفت : **هرگاه محملهای دوحامل $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{V'}$ متوازی ویا برهم منطبق باشند نسبت‌حامل $\overrightarrow{V'}$ بحامل $\overrightarrow{V}$ عددیست‌جبری که قدرمطلق آن مساویست بانسبت طول حامل $\overrightarrow{V'}$ بطول حامل $\overrightarrow{V}$ و علامت آن + یا − است برحسب آنکه دو حامل مزبور متحدالجهت و یا مختلف‌الجهت باشند (ش ۷۱۸)**

مثلانسبت دوحامل همسنگ ۱+ ونسبت دوحامل‌متقابل ۱− است.

تبصرهٔ ۱ ـ باید متوجه بود که فقط در صورتی میتوان از نسبت دو حامل گفتگو کرد که محملهای آن دوحامل یا متوازی و یا برهم منطبق



(ش ۷۱۸)

باشند ـ اگر بجای هریك از حاملهای V و V' حاملی هم‌سنگ با آن اختیار کنیم نسبت آنها تغییری نخواهد کرد.

تبصرهٔ ۲ ـ از آنچه گذشت نتیجه میشود که دو تساوی

$$\frac{\vec{V'}}{\vec{V}} = m \quad \text{و} \quad \vec{V'} = m\times\vec{V}$$

که در آنها m یك عدد جبریست باهم معادل هستند ومعنی آنها اینست که:

اولا محملهای حاملهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ یا باهم موازی و یا برهم منطبق هستند.

ثانیاً نسبت طول حامل $\vec{V'}$ بطول حامل $\vec{V}$ مساویست با قدرمطلق m

ثالثاً اگر m مثبت باشد حاملهای $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ متحدالجهت هستند و اگر m منفی باشد دوحامل مزبور مختلف‌الجهت میباشند.

۹۱۷ ـ اگر محملهای دوحامل $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ باهم موازی و یا برهم منطبق باشند و روی این دومحمل متوازی یك جهت مثبت مشترك اختیار کنیم **نسبت حامل $\vec{AB}$ بحامل $\vec{CD}$ مساویست بانسبت اندازهٔ جبری**

حامل $\vec{AB}$ باندازهٔ جبری حامل $\vec{CD}$. یعنی:

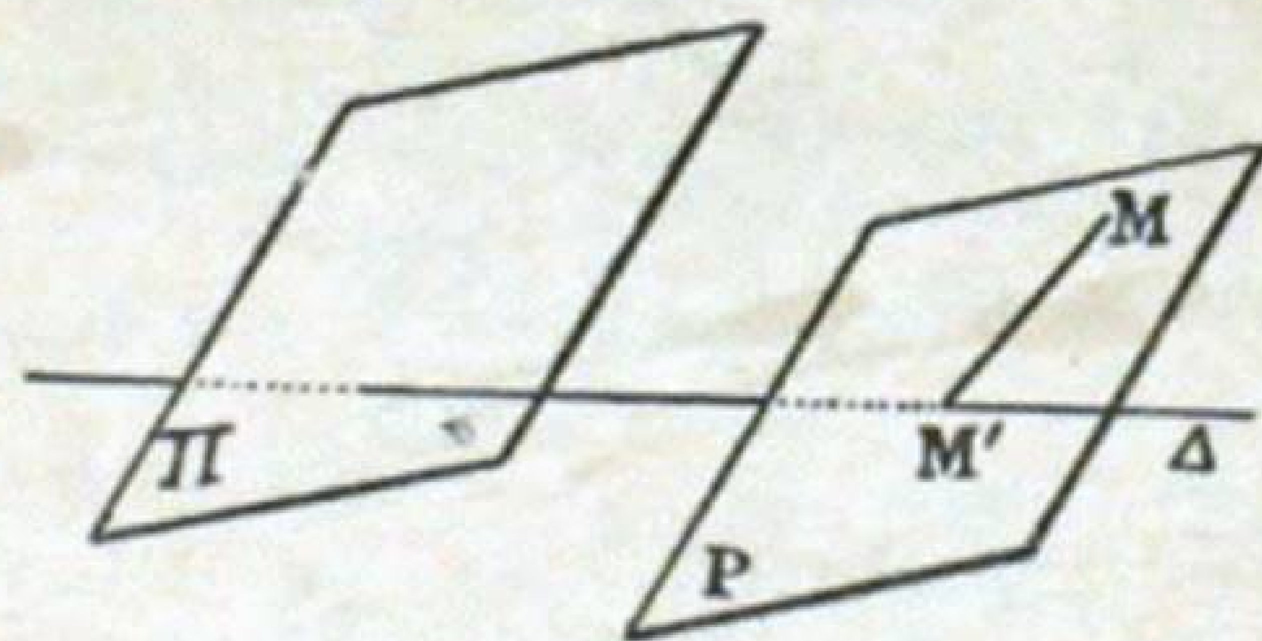
$$\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

درواقع قدرمطلق هریك ازاین دونسبت مساویست با $\frac{AB}{CD}$ وعلامت هردوی آنها اگر دو حامل متحدالجهت باشند + و اگر مختلف‌الجهت باشند − است.

۲ ـ تصویر روی یك خط راست

۹۱۸ ـ تعریف ـ خطراست Δ وصفحهٔ π را که باخط Δ موازی نیست در نظر میگیریم.

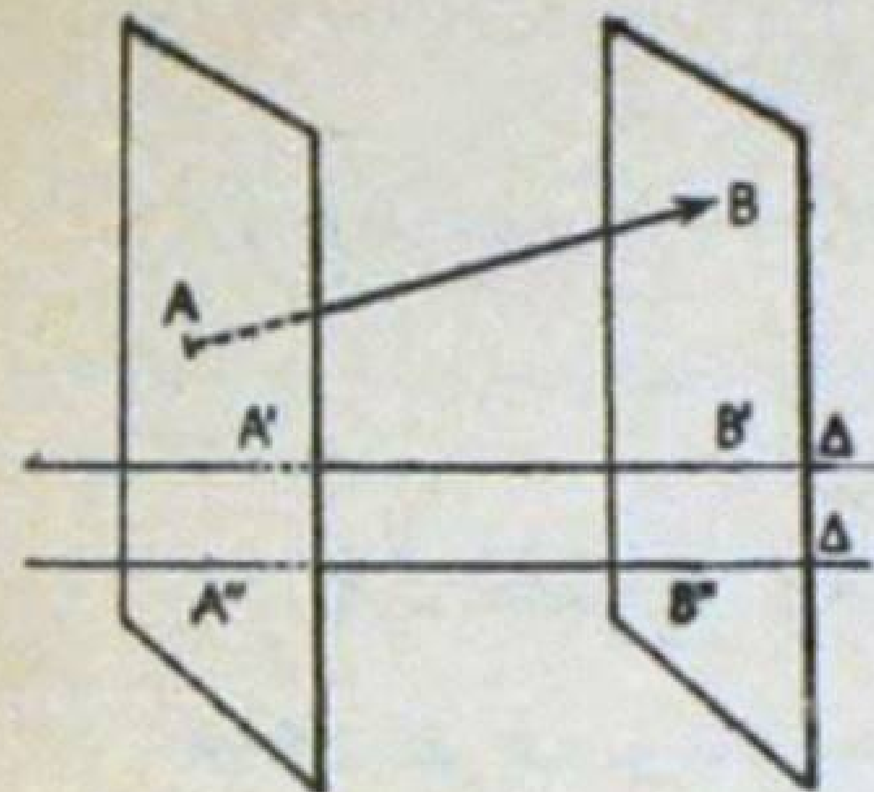
تصویر هرنقطه مانند M از فضا روی خط Δ و بموازات صفحهٔ π عبارتست از فصل‌مشترك خط Δ باصفحهٔ P که از نقطهٔ M بموازات صفحهٔ π رسم شود. در حالت خاصی که صفحهٔ π برخط D عمود باشد تصویر را **قائم** مینامند.



(ش ۷۱۹)

درشکل ۷۱۹ نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M روی خط Δ و بموازات صفحهٔ π است ـ صفحهٔ P را **صفحهٔ مصور نقطهٔ M** مینامند ـ اگرنقطهٔ M درصفحهٔ π واقع باشد صفحهٔ مصورش همان صفحهٔ π خواهد بود ـ هر نقطهٔ M ازفضا یك تصویرروی خط Δ (بموازات صفحهٔ π) دارد واگر نقطهٔ M روی خط Δ واقع باشد تصویرش بر خودش منطبق است ـ اگر یك نقطه مانند M' روی خط Δ در نظر بگیریم تصاویر جمیع نقاط صفحهٔ P که از نقطهٔ M' بموازات صفحهٔ π رسم شود برنقطهٔ M' منطبق خواهند بود.

تصویر هر حامل مانند $\overrightarrow{AB}$ عبارتست از حامل $\overrightarrow{A'B'}$ که مبدأ و منتهایش بترتیب تصاویر مبدأ و منتهای حامل $\overrightarrow{AB}$ باشند (ش ۷۲۰)



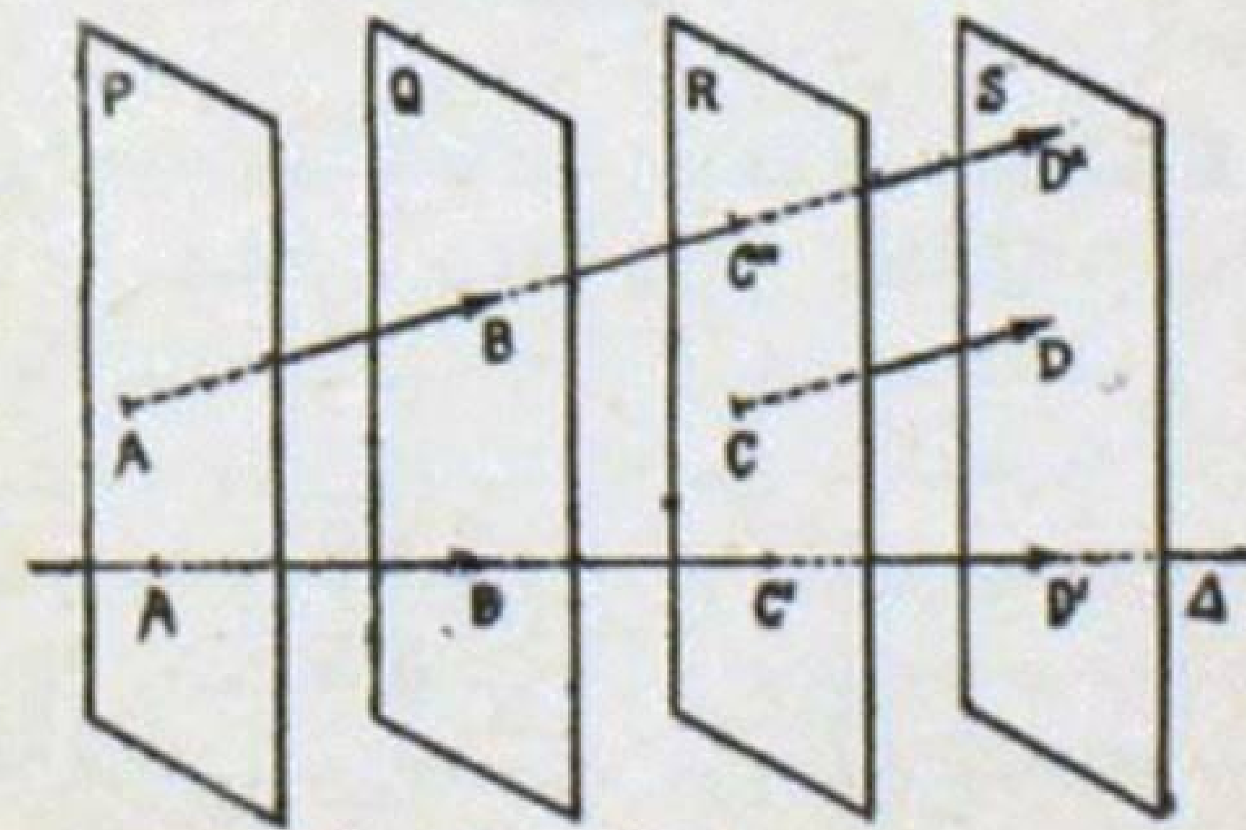
(ش ۷۲۰)

اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ با خط Δ موازی باشد تصویرش با خودش همسنگ است.

برای آنکه تصویر یك حامل صفر باشد لازم و کافیست که آن حامل صفر و یا موازی با صفحهٔ π باشد. واضح است که تصاویر یك حامل روی، دو خط متوازی Δ و Δ_1 بموازات یك صفحه دو حامل همسنگ هستند (ش ۷۲۰)

۹۱۹ ـ قضیه ـ اگر محملهای دو حامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ باهم موازی یا برهم منطبق باشند نسبت تصویر حامل $\overrightarrow{AB}$ بتصویر حامل $\overrightarrow{CD}$ مساویست بانسبت حامل $\overrightarrow{AB}$ بحامل $\overrightarrow{CD}$.

میدانیم که نسبت $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ عددیست جبری که قدر مطلقش $\frac{AB}{CD}$ و علامتش + یا − است برحسب آنکه دوحامل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متحدالجهت



(ش ۷۲۱)

و یا مختلف‌الجهت باشند. صفحات P و Q و R و S که بترتیب از نقاط A و B و C و D بموازات صفحهٔ π بگذرند خط Δ را درنقاط A' و B' و C' و D' قطع میکنند. فصل‌مشترك خط راست AB را باصفحات R و S نقاط C'' و D'' مینامیم (ش ۷۲۱) واضح است که $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C''D''}$ و نظر بقضیهٔ طالس در فضا (شمارهٔ ٥٦٤ مقالهٔ پنجم) داریم:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{C''D''}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$$

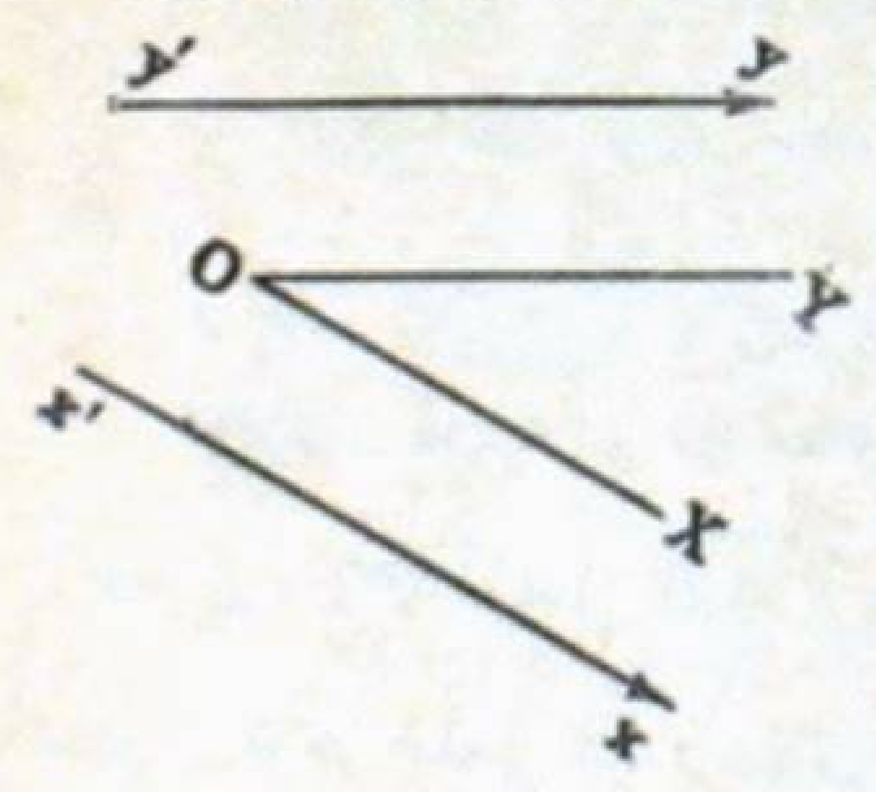
و قضیه ثابت است.

۹۲۰ ـ نتیجه ـ اگر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشند حاملهای $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ نیز همسنگ خواهند بود یعنی:

اگر دوحامل همسنگ را روی یك خط تصویر کنیم دوحامل متساوی بدست میآید.

اندازهٔ جبری تصویر قائم یك حامل روی یك محور.

۹۲۱ ـ تعریف ـ دومحور x'x و y'y را در فضا درنظر میگیریم و از نقطهٔ دلخواهی مانند O دونیم‌خط OX و OY را بترتیب موازی و متحدالجهت با x'x رسم میکنیم (ش ۷۲۲) اندازهٔ زاویهٔ محدب XOY بستگی بموضع نقطهٔ O ندارد (شمارهٔ ٥٤٠ مقالهٔ پنجم)



(ش ۷۲۲)

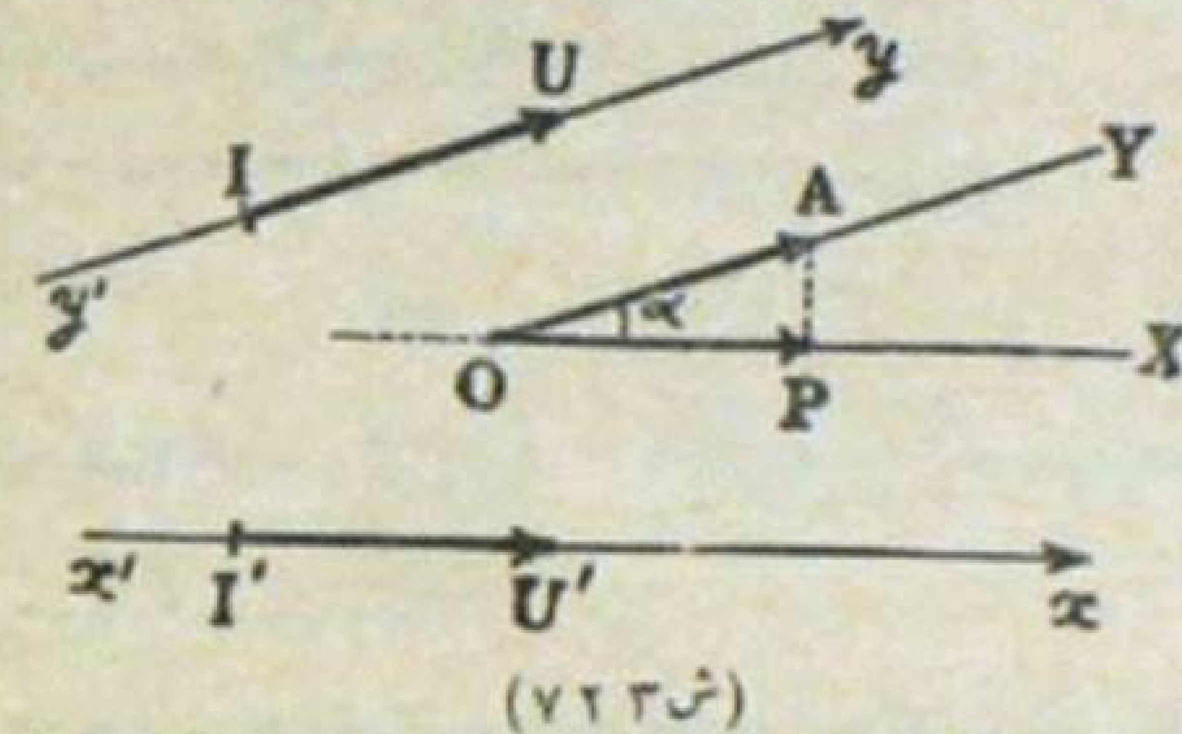
زاویهٔ محدب XOY را زاویهٔ دو محور x'x و y'y مینامند

گاهی زاویهٔ دومحور x'x و y'y را باعلامت قراردادی (x'x و y'y) یا (y'y و x'x) نشان میدهند.

۹۲۲ ـ قضیه ـ دو محور x'x و y'y را در فضا در نظر میگیریم. اگر $\overrightarrow{IU}$ یك حامل واحد محور y'y باشد اندازهٔ

جبری تصویر قائم☼ حامل $\overrightarrow{IU}$ روی محور x'x مساویست با کسینوس زاویهٔ دو محور.

از نقطهٔ دلخواه O دو نیم‌خط OX و OY را بترتیب موازی و متحدالجهت بامحورهای x'x و y'y رسم ونقطهٔ A را بفاصلهٔ OA=۱ روی OY اختیار میکنیم. حامل $\overrightarrow{OA}$ همسنگ حامل $\overrightarrow{IU}$ است و تصویر



(ش ۷۲۳)

قائم حامل $\overrightarrow{OA}$ روی خط OX همسنگ با تصویر حامل $\overrightarrow{IU}$ روی خط x'x میباشد و اگر تصویر حامل $\overrightarrow{IU}$ را روی x'x حامل $\overrightarrow{I'U'}$ و تصویر نقطهٔ A را روی خط OX نقطهٔ P بنامیم نظر بتعریف کسینوس داریم:

$$\overline{OP}=\cos\widehat{XOY}$$

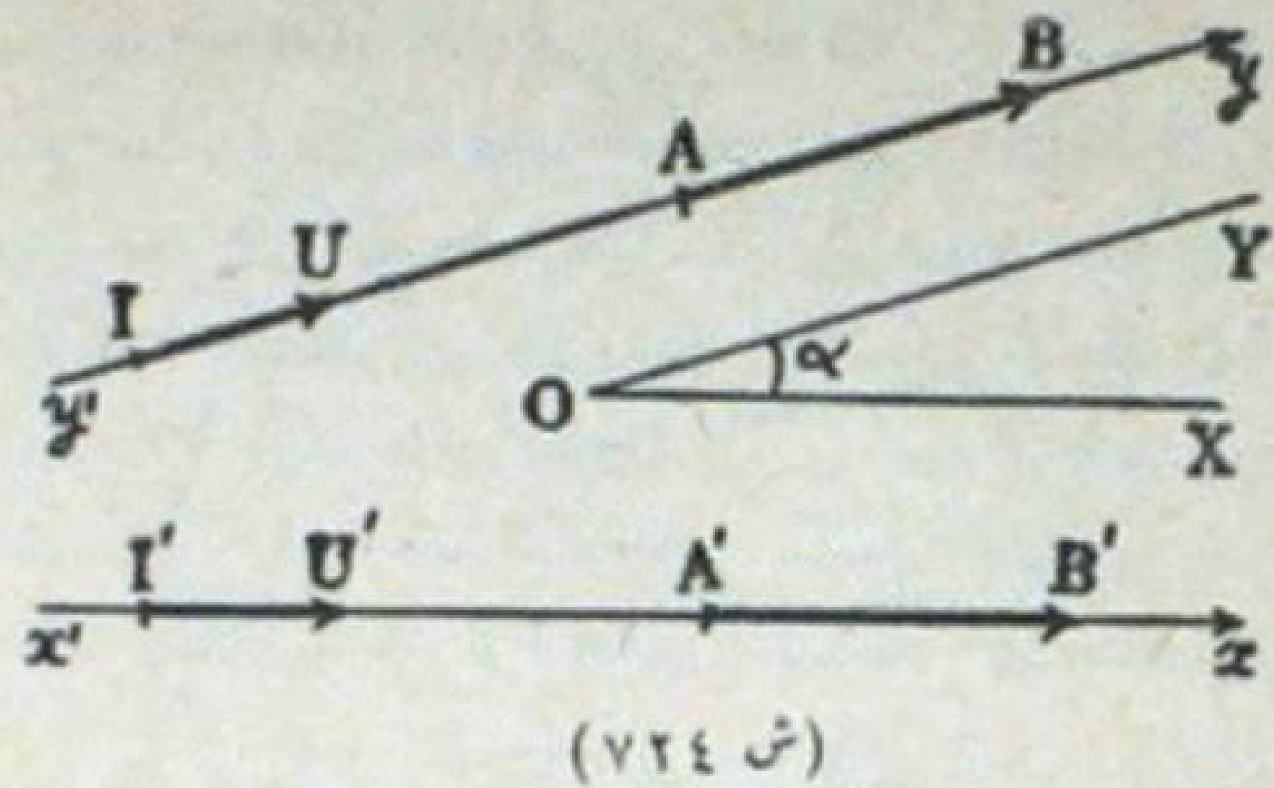
$\overline{OP}$ اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OP}$ روی محور x'x است.

وچون $\overline{I'U'}=\overline{OP}$ پس $\overline{I'U'}=\cos\widehat{XOY}$ و قضیه ثابت است.

۹۲۳ ـ قضیه ـ دو محور x'x و y'y را در فضا در نظر میگیریم. اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ برمحور y'y واقع باشد اندازهٔ جبری تصویر قائم حامل $\overrightarrow{AB}$ روی محور x'x مساویست با حاصلضرب اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{AB}$ روی محور y'y در کسینوس زاویهٔ دومحور.

☼ دقت کنید که این قضیه فقط درمواردی صحیح است که تصویر قائم باشد.

فرض میکنیم حامل $\overrightarrow{IU}$ یك حامل واحد محور y'y باشد و تصاویر قائم حاملهای $\overrightarrow{IU}$ و $\overrightarrow{AB}$ را برخط x'x بترتیب حاملهای $\overrightarrow{I'U'}$ و $\overrightarrow{A'B'}$



(ش ۷۲٤)

مینامیم نظر بقضیهٔ ۹۱۹ داریم:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{IU}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{I'U'}}$$

و نظر بشمارهٔ ۹۱۷ رابطهٔ فوق را میتوان چنین نوشت:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{IU}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{I'U'}}$$

اما $\overline{IU}=1$ و اگر زاویهٔ دومحور x'x و y'y را α بنامیم

$\overline{I'U'}=\cos\alpha$ (شمارهٔ ۹۲۲)

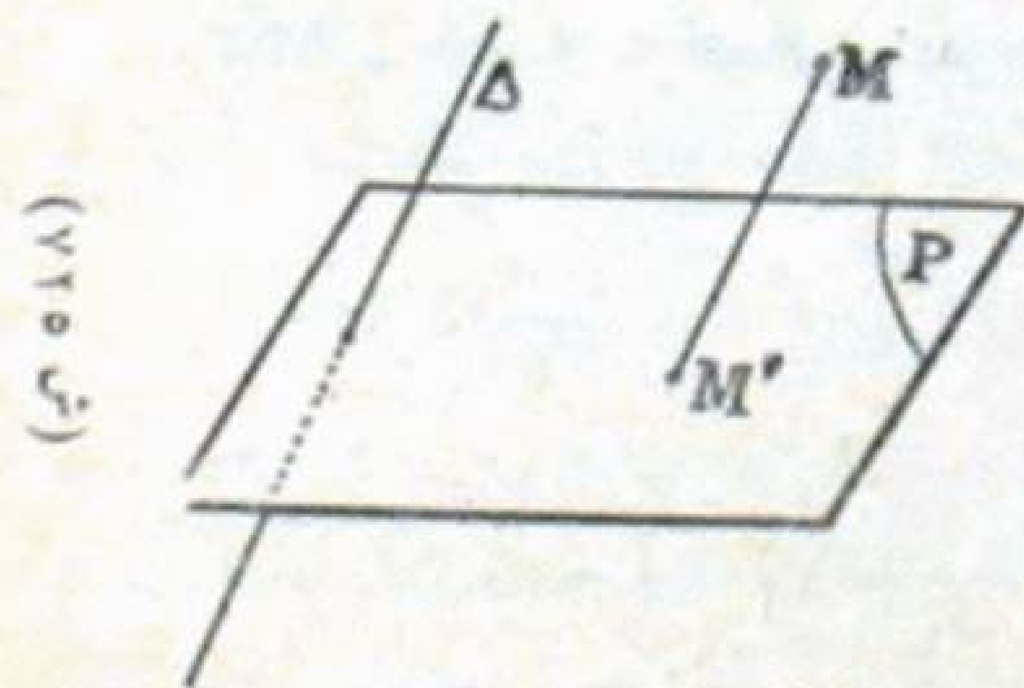
بنابراین

$$\boxed{\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\alpha}$$

۳ ـ تصویر روی یك صفحه

۹۲٤ ـ تعریف ـ خط راست Δ وصفحهٔ P را که با خط Δ موازی نیست درنظر میگیریم.

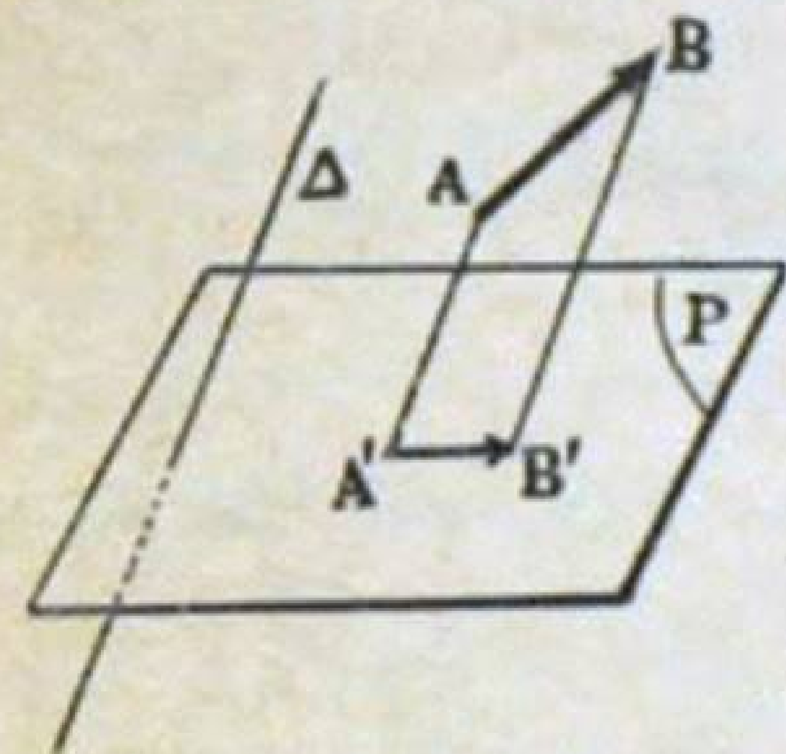
تصویر هر نقطه مانند M ازفضا روی صفحهٔ P و بموازات خط Δ



(ش ۷۲۵)

عبارتست از فصل مشترك صفحهٔ P با خطی که از نقطهٔ M بموازات خط Δ رسم شود. درحالت خاصی که خط Δ برصفحهٔ P عمود باشد تصویر را **قائم** مینامند.

در شکل ۷۲۵ نقطهٔ M' تصویر نقطهٔ M روی صفحهٔ P و بموازات خط Δ است ـ خط راست MM' را **خط مصور نقطهٔ M** مینامند ـ اگر نقطهٔ M روی خط Δ واقع باشد خط مصورش همان خط Δ خواهد بود ـ هر نقطهٔ M از فضا يك تصوير روی صفحهٔ P (بموازات خط Δ) دارد و اگر نقطهٔ M درصفحهٔ P واقع باشد تصویرش بر خودش منطبق است ـ اگر يك نقطه مانند M' روی صفحهٔ P درنظر بگیریم تصاویر جمیع نقاط خطی که از نقطهٔ M' بموازات خط Δ رسم شود بر نقطهٔ M' منطبق خواهند بود.



(ش ۷۲۶)

تصوير هر حامل مانند $\overrightarrow{AB}$ عبارتست از حامل $\overrightarrow{A'B'}$ که مبدأ و منتهایش بترتیب تصاویر مبدأ و منتهای حامل $\overrightarrow{AB}$ باشند (ش ۷۲۶)ـ صفحهٔ ABA'B' را صفحهٔ مصور حامل $\overrightarrow{AB}$ میگویند ـ اگر حامل $\overrightarrow{AB}$ باصفحهٔ P موازی باشد تصویرش باخودش همسنگ است.

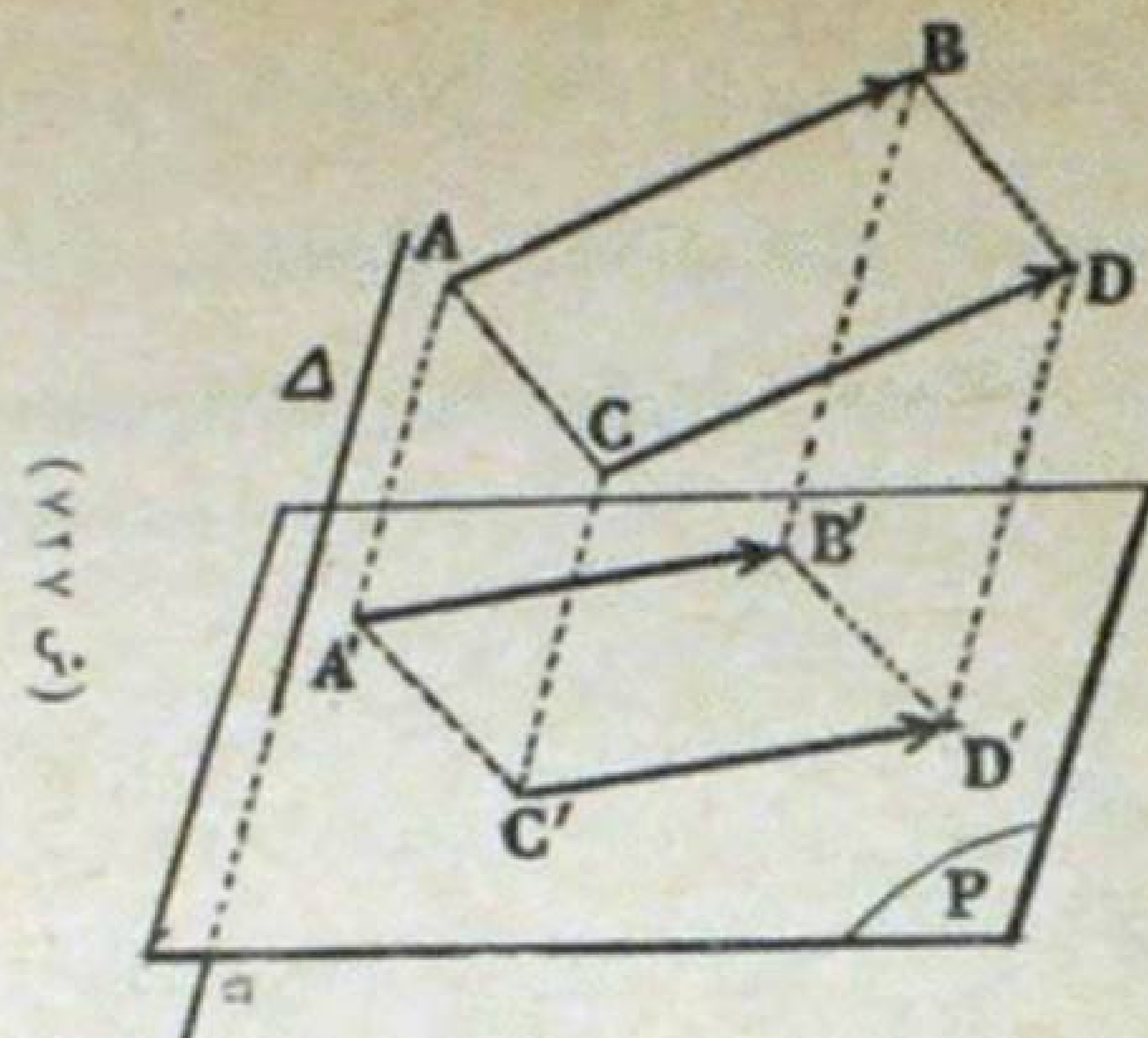
برای آنکه تصویر يك حامل برصفحهٔ P صفر باشد لازم و کافیست که آن حامل صفر ویا موازی باخط Δ باشد.

واضح است که تصاویر يك حامل بموازات يك خط روی دوصفحهٔ متوازی حاملهای همسنگ هستند.

۹۳۵ ـ قضیه ـ تصاویر دوحامل همسنگ روی يك صفحه و بموازات يك خط دو حامل همسنگ هستند.

دوحامل همسنگ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را درنظر میگیریم وتصاویر آنهارا روی صفحهٔ P و بموازات خط Δ بترتیب حاملهای $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ مینامیم.

شکل ABDC متوازی الاضلاع است و صفحات مصور ABA'B' و CDC'D' یا باهم موازی ویا برهم منطبق هستند.



(ش ۷۲۷)

درحالت اول صفحات ACA'C' و BDB'D' نیز باهم موازی هستند و شکل A'B'D'C' متوازی الاضلاع است و لذا حاملهای $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ همسنگ هستند.

درحالت دوم یعنی درصورتیکه صفحات مصور ABA'B' و CDC'D' برهم منطبق باشند اگر حاملی مانند $\overrightarrow{EF}$ در نظر بگیریم که باحاملهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ همسنگ باشد ولی صفحهٔ مصورش بر صفحات مزبور منطبق نباشد و تصویر حامل $\overrightarrow{EF}$ را حامل $\overrightarrow{E'F'}$ بنامیم نظر بحالت اول داریم:

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{E'F'} \quad و \quad \overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{E'F'}$$

و بنابراین دوحامل $\overrightarrow{A'B'}$ و $\overrightarrow{C'D'}$ که هردو بايك حامل یعنی $\overrightarrow{E'F'}$ همسنگ هستند خودشان همسنگ میباشند.

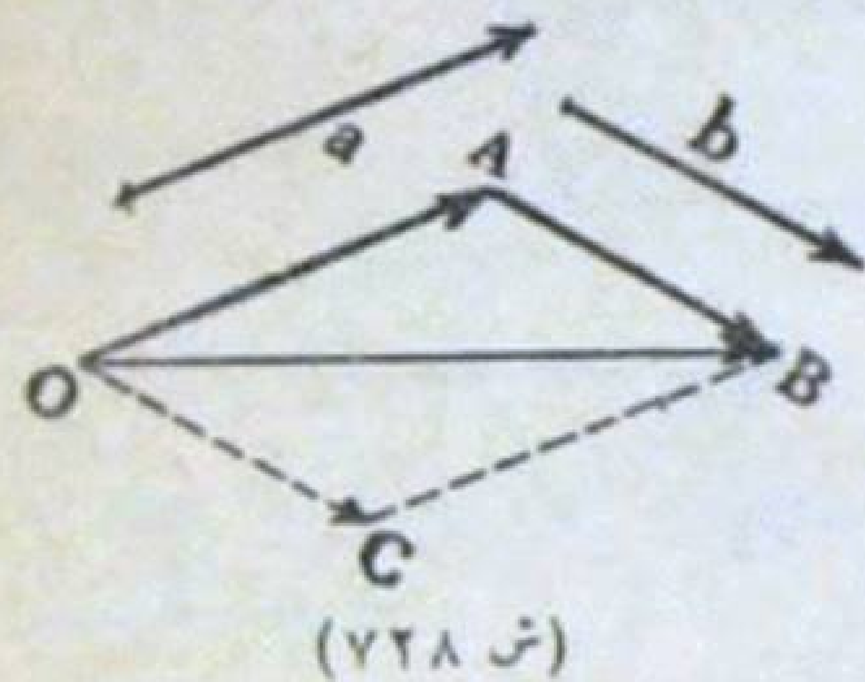
٤ ـ مجموع هندسی چند حامل

۹۲۶ ـ مجموع هندسی دوحامل ـ دوحامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در فضادر نظر میگیریم و $\vec{a}$ راحامل اول و $\vec{b}$ را حامل دوم مینامیم☆

☆ یعنی برای دوحامل ترتیب قائل میشویم.

و از نقطهٔ دلخواه O حامل $\overrightarrow{OA}$ را همسنگ باحامل اول و از نقطهٔ A حامل $\overrightarrow{AB}$ را همسنگ با حامل دوم اختیار میکنیم . حامل $\overrightarrow{OB}$ را مجموع هندسی حاملهای اول و دوم در نقطهٔ O مینامند (ش ۷۲۸) و مینویسند :

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$



(ش ۷۲۸)

واضح است که اگر حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متقابل باشند نقطهٔ B بر نقطهٔ O منطبق میشود یعنی مجموع دو حامل متقابل صفر است .

در تعریف فوق برای حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ترتیب قائل شدیم وحامل $\vec{a}$ را بر حامل $\vec{b}$ مقدم داشتیم اکنون ثابت میکنیم که اگر حامل $\vec{b}$ را بر حامل $\vec{a}$ مقدم داریم و برای بدست آوردن مجموع ابتدا حامل $\overrightarrow{OC}$ را همسنگ با $\vec{b}$ و سپس از نقطهٔ C حاملی همسنگ با $\vec{a}$ رسم کنیم باز همان حامل $\overrightarrow{OB}$ بدست خواهد آمد.

درواقع چون حاملهای $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AB}$ هردو باحامل $\vec{b}$ همسنگ هستند خودشان همسنگ میباشند ولذا حامل $\overrightarrow{CB}$ باحامل $\overrightarrow{OA}$ و بنابراین با $\vec{a}$ همسنگ است (شمارهٔ ۹۱۱) و داریم :

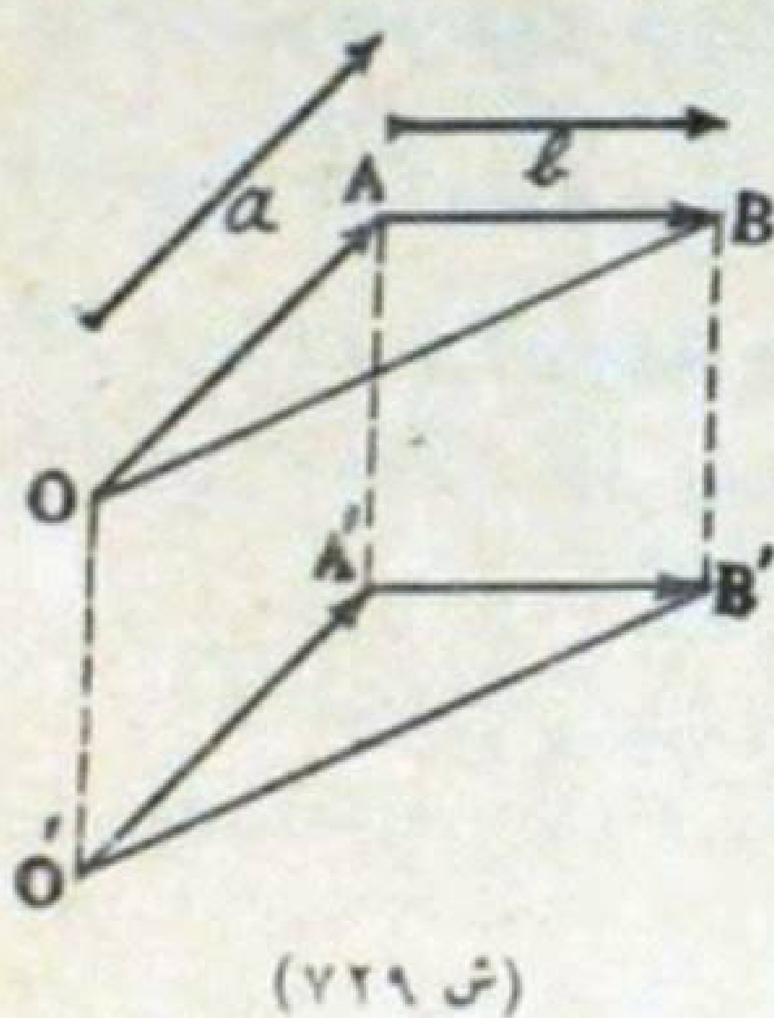
$\overrightarrow{OB} = \vec{b} + \vec{a}$ پس میتوان نوشت $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

یعنی : مجموع دوحامل بترتیبی که آنها را یکی پس از دیگری اختیار میکنیم بستگی ندارد و میتوان حامل OB را بدون قید ترتیب مجموع هندسی حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامید.

مجموع هندسی دوحامل دارای خاصیت‌های زیر میباشد :

الف ـ اگر بجای دوحامل حاملهایی همسنگ با آنها اختیار کنیم در مجموع آن دو حامل تغییری حاصل نمیشود .

ب ـ در تعریف مجموع دو حامل نقطهٔ O را بطور دلخواه اختیار کردیم. اکنون ثابت‌میکنیم که اگربجای O نقطهٔ دیگری مانند O' اختیار کنیم مجموع هندسی حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در نقطهٔ O' بامجموع هندسی آنها درنقطهٔ O همسنگ است.



(ش ۷۲۹)

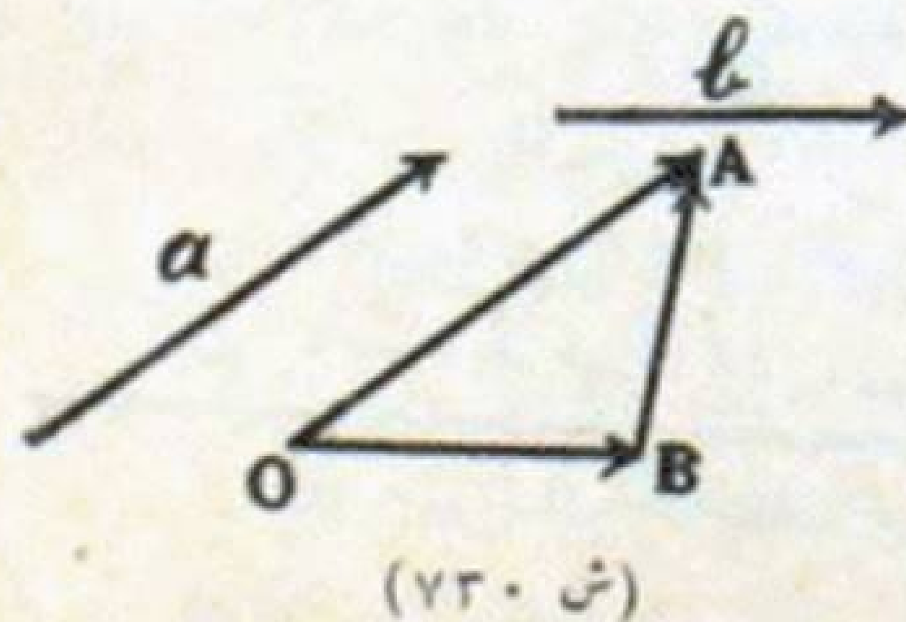
اگر $\overrightarrow{O'B'}$ مجموع حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ درنقطهٔ O' باشد (ش۷۲۹) داریم :

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} = \vec{a}$ پس دو حامل $\overrightarrow{OO'}$ و $\overrightarrow{AA'}$ همسنگ هستند (شمارهٔ ۹۱۱) و همچنین داریم :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \vec{b}$ پس دو حامل $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ همسنگ میباشند

ولذا $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'}$ و در نتیجه دو حامل $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{O'B'}$ همسنگ هستند (شمارهٔ ۹۱۱)

۹۳۷ ـ فضل هندسی یك حامل بر حامل دیگر ـ دو حامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در نظر گرفته از نقطهٔ اختیاری O حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را بترتیب همسنگ با آنها اختیار میکنیم (ش ۷۳۰) نظر بتعریف مجموع هندسی دوحامل داریم :



(ش ۷۳۰)

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$$

وچون $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$

پس داریم :

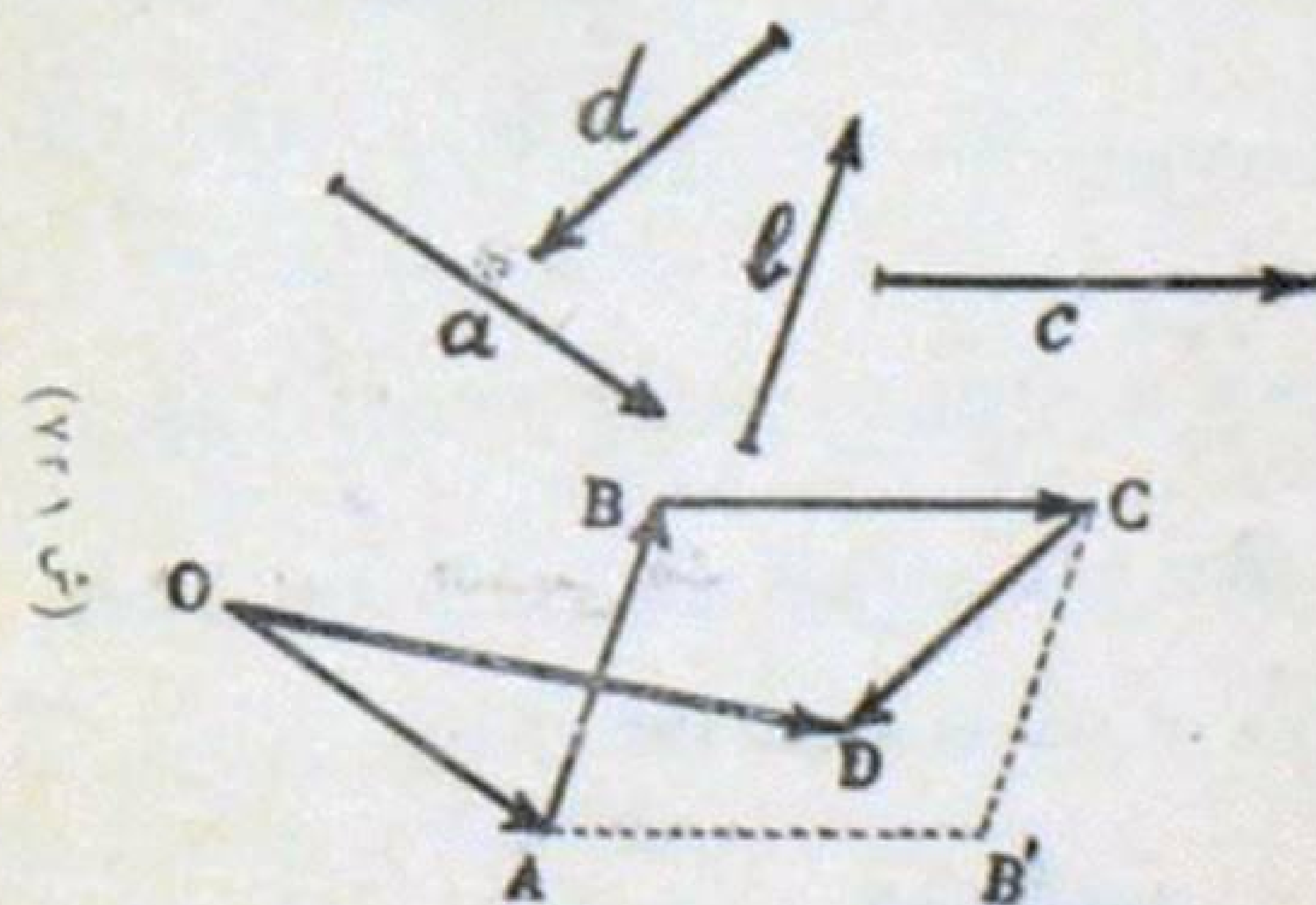
$$\vec{BA}=\vec{OA}+(-\vec{OB})=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$$

حامل $\vec{BA}$ را که از افزودن حامل متقابل $\vec{b}$ بحامل $\vec{a}$ بدست میآید فضل حامل $\vec{a}$ برحامل $\vec{b}$ مینامند.

۹۳۸ - مجموع هندسی چند حامل - حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ را درفضا درنظر میگیریم و آنها را بترتیب حامل اول و دوم و سوم و چهارم مینامیم* و از نقطهٔ دلخواهی مانند O حاملهای $\vec{OA}$ و$\vec{AB}$ و$\vec{BC}$ و $\vec{CD}$ را بترتیب همسنگ باحاملهای اول ودوم وسوم وچهارم اختیارمیکنیم. حامل $\vec{OD}$ را مجموع هندسی حاملهای اول ودوم وسوم وچهارم مینامند ومینویسند:

$$\vec{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$

اگر نقطهٔ D بر نقطهٔ O منطبق شود مجموع صفر است .



(ش ۷۳۱)

درتعریف فوق برای حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ ترتیب قائل شدیم. اکنون ثابت میکنیم که اگر این ترتیب را مراعات نکنیم باز همان حامل

* یعنی برای حاملهای مفروض ترتیب قائل میشویم.

$\vec{OD}$ بدست خواهد آمد :

درواقع بدون آنکه در مجموع تغییری حاصل شود میتوانیم بجای دوحامل متوالی مجموع آنها را قرار دهیم :

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{b}+\vec{c}$$

ومیتوانیم بجای $\vec{AC}$ مجموع $\vec{AB'}+\vec{B'C}=\vec{c}+\vec{b}$ راقرار دهیم (ش۷۳۱)

پس : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{OA}+\vec{AC}+\vec{CD}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{d}$

بنابراین بدون آنکه در مجموع تغییری حاصل شود میتوان ترتیب دوحامل متوالی را تغییر داد و واضح است که باتغییر دادن ترتیب حاملهای مجاور میتوانیم حاملها را بهرترتیبی که بخواهیم باهم جمع کنیم وهمواره مجموع همان حامل $\vec{OD}$ خواهد بود. یعنی مجموع چند حامل بترتیبی که آنها را یکی پس‌از دیگری اختیار میکنیم بستگی ندارد و میتوان حامل $\vec{OD}$ را بدون قید ترتیب مجموع هندسی حاملهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ نامید.

مجموع هندسی چند حامل دارای خاصیت‌های زیر میباشد :

الف - اگر بجای چند حامل حاملهایی همسنگ با آنها اختیار کنیم در مجموع آن چند حامل تغییری حاصل نمیشود .

ب - اگربجای نقطهٔ O نقطهٔدیگری مانند O' اختیار کنیم مجموع آن چند حامل در نقطهٔ O با مجموع آنها در نقطهٔ O' همسنگ است (استدلال مانند استدلالی‌است که در مورد مجموع دوحامل بیان کردیم)

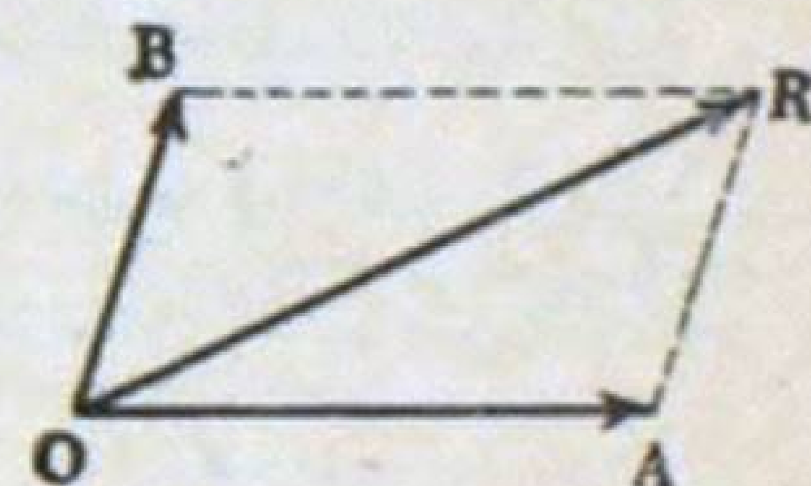
ج - برای بدست‌آوردن مجموع هندسی چندین حامل میتوان بجای دو یا چندتا از آنها مجموعشان را قرار داد. درواقع کافیست این چندحامل را درمراتب‌اول قراردهیم وتعریف مجموع هندسی چند حامل‌را بکاربریم.

تمرین - ثابت کنید که اگر چند حامل را در یك عدد جبری ضرب کنیم مجموع آنها درهمان عدد ضرب میشود.

۹۳۹ - حالات خاص - منتجهٔ چند حامل که مبدأشان مشترک باشد .

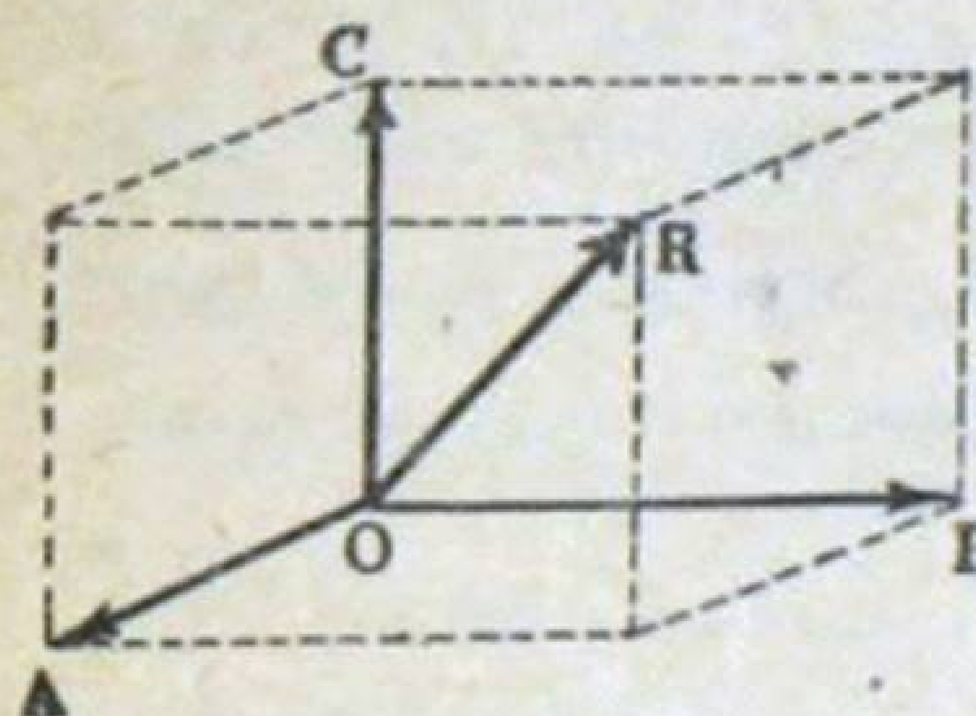
اگر چند حامل در مبدأ O مشترک باشند و مجموع هندسی آنها را در نقطهٔ O حامل $\overrightarrow{OR}$ بنامیم میگویند که حامل $\overrightarrow{OR}$ منتجهٔ حاملهای مزبور است . مثلا :

منتجهٔ دو حامل $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ عبارتست از قطر متوازی‌الاضلاعی که دو ضلعش OA و OB باشند (ش ۷۳۲)



$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

(ش ۷۳۲)



$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

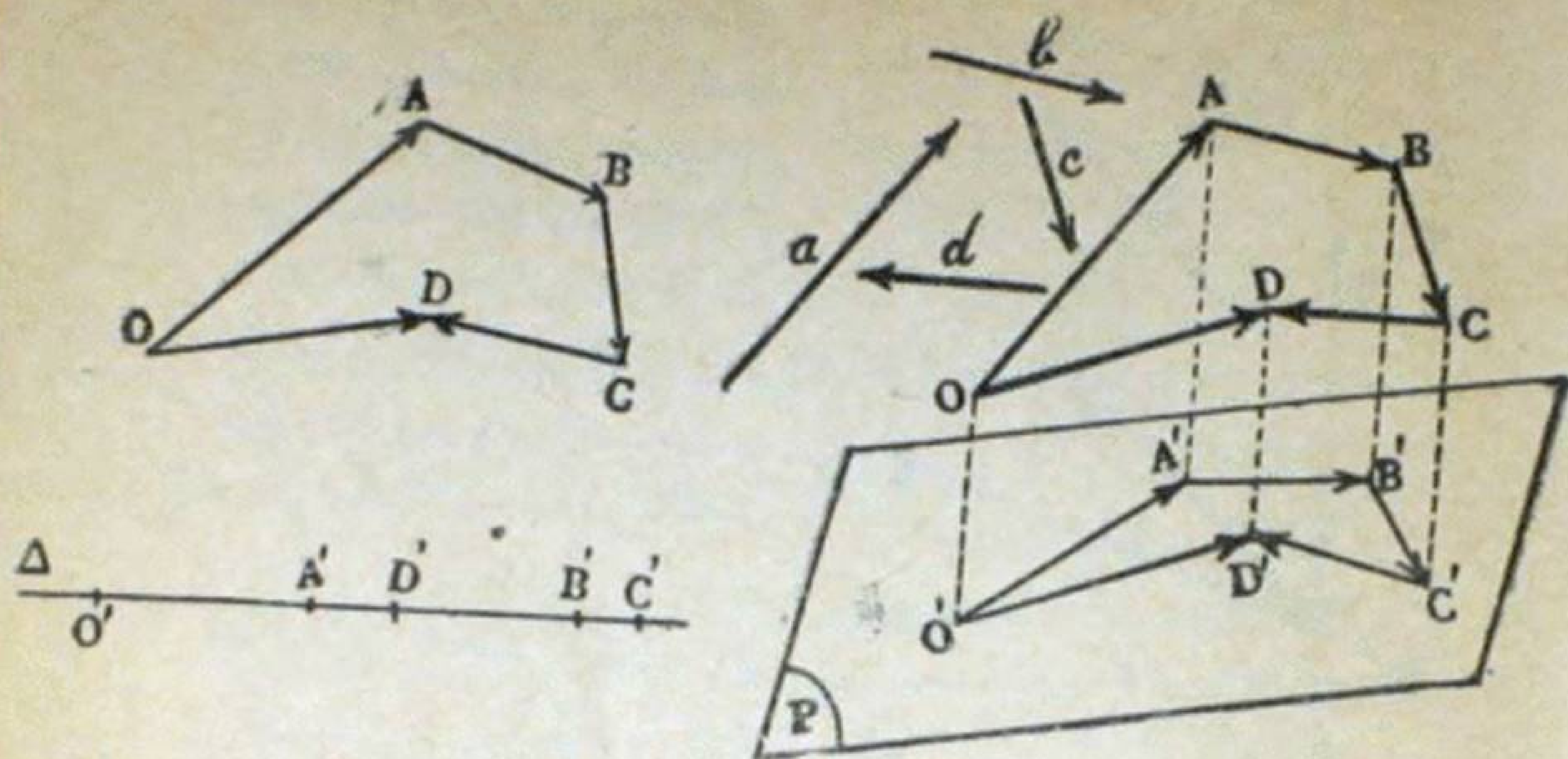
(ش ۷۳۳)

منتجهٔ سه حامل $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ که در یک صفحه واقع نباشند قطر متوازی‌السطوحی است که سه یالش OA و OB و OC باشند (ش ۷۳۳)

قضیهٔ تصاویر

۹۴۰ - قضیه - هرگاه چند حامل و مجموع هندسی آنها را روی یک خط بموازات یک صفحه (یا روی یک صفحه بموازات یک خط) تصویر کنیم تصویر مجموع هندسی عبارتست از مجموع هندسی تصاویر آن حاملها.

این قضیه از تعریف مجموع هندسی چند حامل نتیجه میشود :



(ش ۷۳٤)

درواقع اگر حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ را بترتیب همسنگ باحاملهای مفروض $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ و $\vec{d}$ اختیار کنیم حامل $\overrightarrow{OD}$ مجموع هندسی حاملهای مفروض است و اگر تصاویر نقاط O و A و B و C و D را روی خط Δ (یا روی صفحهٔ P) بترتیب نقاط O' و A' و B' و C' و D' بنامیم از تساوی هندسی :

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$

تساوی هندسی زیر نتیجه میشود :

$$\overrightarrow{O'D'}=\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}$$

۹۴۱ - نتیجهٔ مهم☆ - اندازهٔ جبری تصویر مجموع هندسی چند حامل روی یک محور مساویست بامجموع اندازه‌های جبری تصاویر حاملهای مزبور .

زیرا اگر روی خط Δ یک جهت مثبت اختیار کنیم (ش ۷۳٤) داریم:

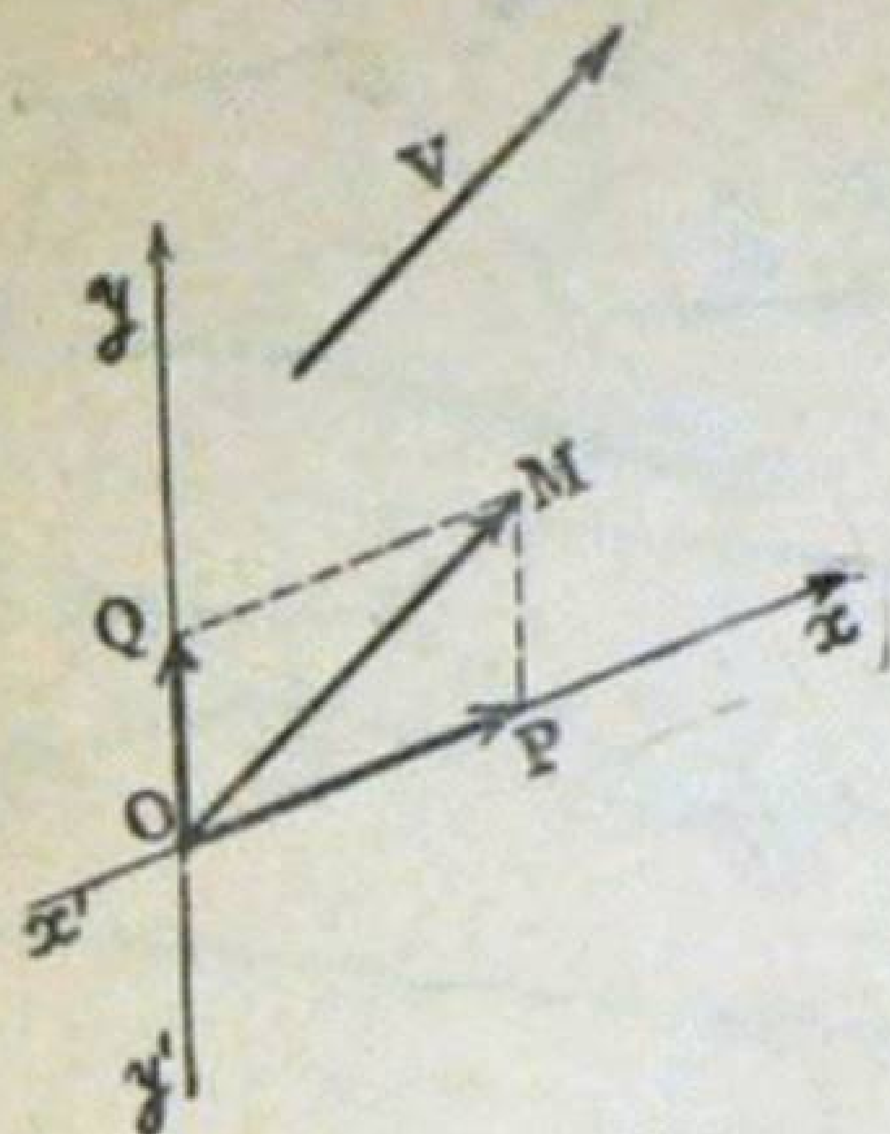
$$\overline{O'D'}=\overline{O'A'}+\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}$$ (رابطهٔ شال)

☆ این نتیجه که موارد استعمال زیاد دارد به قضیهٔ تصاویر معروفست .

دستگاههای محورهای مختصات

۹۳۲ - مختصات یك نقطه

ث . ح، ـ در یك صفحه دو محور متقاطع $x'Ox$ و $y'Oy$ و یك نقطهٔ دلخواه مانند M را در نظر میگیریم و از نقطهٔ M دو خط بموازات $y'y$ و $x'x$ رسم میکنیم تا اولی محور $x'x$ را در نقطه‌ای مانند P و دومی محور $y'y$ را در نقطه‌ای مانند Q قطع کند (ش ۷۳۵)



(ش ۷۳۵)

اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OP}$ را روی محور $x'x$ **طول نقطهٔ M** و اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OQ}$ را روی محور $y'y$ **عرض نقطهٔ M** مینامند و معمولا طول یك نقطه را باحرف x و عرض آنرا با حرف y مینمایانند:

$$\overline{OQ}=y \quad \text{و} \quad \overline{OP}=x$$

بنابراین بازای هر نقطه مانند M از صفحهٔ دو محور $x'x$ و $y'y$ دستگاه دو عدد جبری $x=\overline{OP}$ و $y=\overline{OQ}$ بدست میآید.

برعکس هر گاه دوعددجبری مانند x و y را درنظربگیریم، روی محور $x'x$ یك نقطه مانند P میتوان یافت بقسمیکه $\overline{OP}$ مساوی با x باشد وروی محور $y'y$ یك نقطه مانند Q میتوان یافت بقسمیکه $\overline{OQ}$ مساوی با y باشد و خطوطی که از نقاط P و Q بترتیب بموازات $y'y$ و $x'x$ رسم شوند در یك نقطه مانند M یکدیگر را قطع میکنند که طولش x و عرضش y میباشد. بنابراین بازای هردستگاه دوعدد جبری x و y یك نقطه مانند M از صفحهٔ دومحور مشخص میشود.

مجموعهٔ طول و عرض هر نقطه را در دستگاه محورهای Oxy مختصات آن نقطه دراین دستگاه مینامند. محور $x'x$ محور طولها و محور $y'y$ محور عرضها نامیده میشوند.

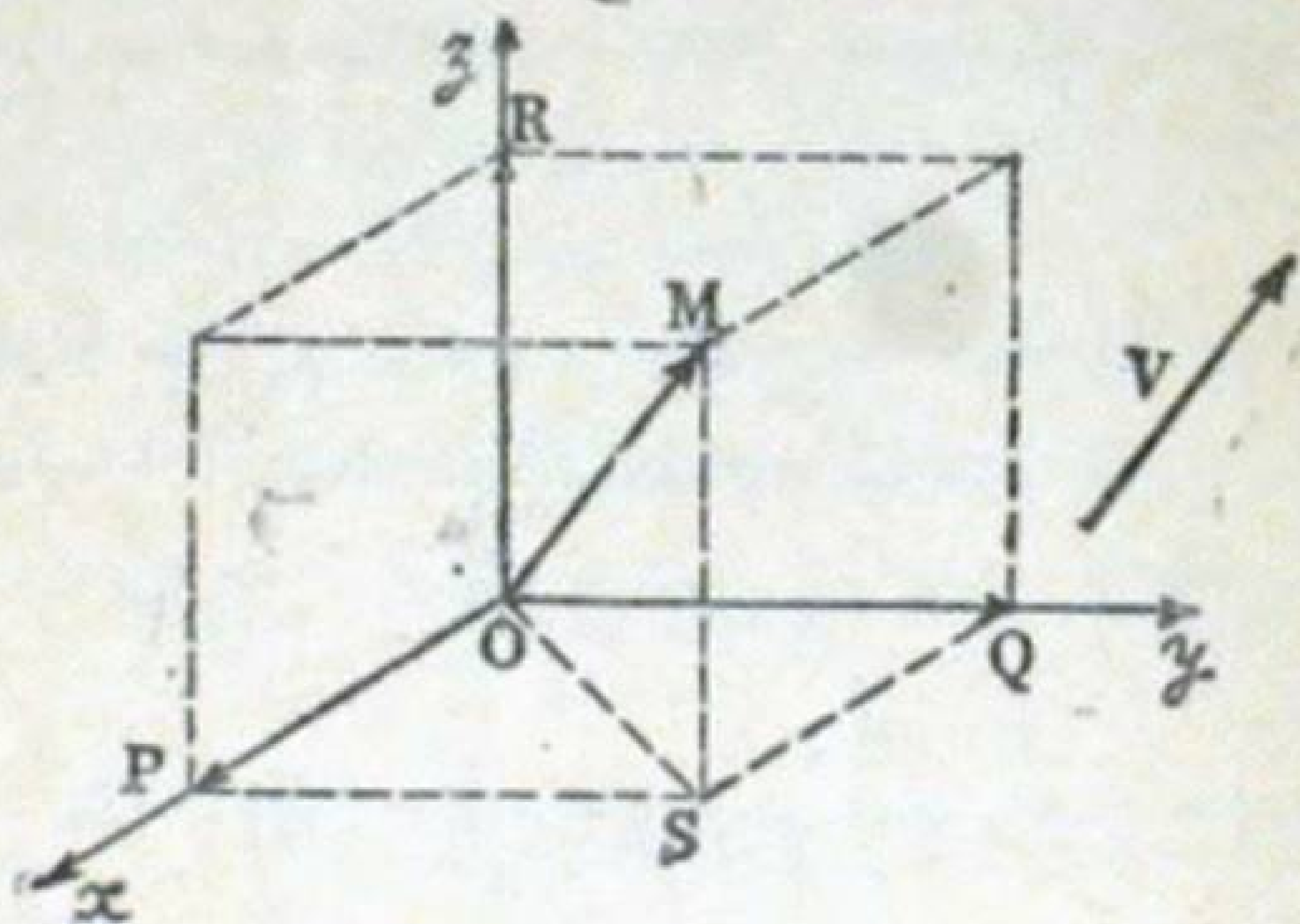
هر گاه دومحور $x'Ox$ و $y'Oy$ برهم عمودباشند مختصات نقطه را **قائم** میگویند.

۹۳۳ - مؤلفه‌های جبری یك حامل دریك صفحه - حامل $\overrightarrow{V}$ را در صفحهٔ xOy در نظر میگیریم و از مبدأ O حامل $\overrightarrow{OM}$ را همسنگ با آن رسم میکنیم (ش ۷۳۵) ومختصات نقطهٔ M را دردستگاه محورهای xOy اعداد a و b مینامیم:

$$a=\overline{OP} \quad \text{و} \quad b=\overline{OQ}$$

اعداد جبری a و b را **مؤلفه‌های جبری حامل $\overrightarrow{V}$** یاهرحاملی که با $\overrightarrow{V}$ همسنگ باشد میگویند - با معلوم بودن اعداد جبری a و b حامل آزاد V مشخص میشود.

۹۳۴ - مختصات یك نقطه درفضا - سه محور متقارب $x'Ox$ و $y'Oy$ و $z'Oz$ را که در یك صفحه واقع نباشند درنظر میگیریم و نقطه‌ای



(ش ۷۳۶)

مانند M در فضا اختیارمیکنیم وتصویر نقطهٔ M را بموازات صفحهٔ yOz روی خط $x'x$ نقطهٔ P و تصویر M را بموازات صفحهٔ xOz روی خط $y'y$ نقطهٔ Q و بالاخره تصویر M را بموازات صفحهٔ xOy روی خط $z'z$ نقطهٔ R مینامیم (ش ۷۳۶)

اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OP}$ را روی محور $x'x$ **طول نقطهٔ M** و اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OQ}$ را روی محور $y'y$ **عرض نقطهٔ M** واندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{OR}$ را روی محور $z'z$ **ارتفاع نقطهٔ M** مینامند و معمولا

طول وعرض و ارتفاع يك نقطه‌را بترتيب با حروف x و y و z مينمايانند:

$\overline{OP}=x$ و $\overline{OQ}=y$ و $\overline{OR}=z$

بنابراين بازاى هر نقطه مانند M از فضا سه عدد جبرى $x=\overline{OP}$ و $y=\overline{OQ}$ و $z=\overline{OR}$ بدست مى‌آيد .

برعكس هرگاه سه‌عددجبرى مانند x و y و z درنظربگيريم روى محور x'x يك نقطه مانند P و روى محور y'y يك نقطه مانند Q و روى محور z'z يك نقطه مانند R ميتوان يافت بقسميكه داشته‌باشيم :

$\overline{OP}=x$ $\overline{OQ}=y$ $\overline{OR}=z$

اگر ازنقاط P و Q دوخط بترتيب بموازات y'y و x'x رسم كنيم اين دوخط يكديگر را درصفحهٔ xOy در نقطه‌اى مانند S قطع ميكنند و صفحه‌اى كه از نقطهٔ R بموازات صفحهٔ xOy بگذرد خطى را كه از S بموازات z'z رسم شود درنقطه‌اى مانند M قطع ميكند كه طولش x و عرضش y وارتفاعش z ميباشد. بنابراين بازاى‌هردستگاه سه‌عددى‌جبرى x و y و z يك نقطه مانند M از فضا مشخص ميشود .

مجموعهٔ طول و عرض و ارتفاع هر نقطه را در دستگاه Oxyz مختصات آن‌نقطه دراين‌دستگاه مينامند. محور x'x محور طولها و محور y'y محور عرضها و محور z'z محور ارتفاعات ناميده ميشوند .

هرگاه Ox و Oy و Oz دوبدو برهم عمود باشند مختصات نقطه را **قائم** ميگويند.

۹۳۵ - مؤلفه‌هاى جبرى يك‌حامل درفضا - حامل $\vec{V}$ را در فضا درنظر ميگيريم وازمبدأ O حامل OM را همسنگ باآن رسم‌ميكنيم (ش۷۳۶) ومختصات‌نقطهٔ M رادردستگاه‌محورهاى Oxyz اعداد a و b و c ميناميم :

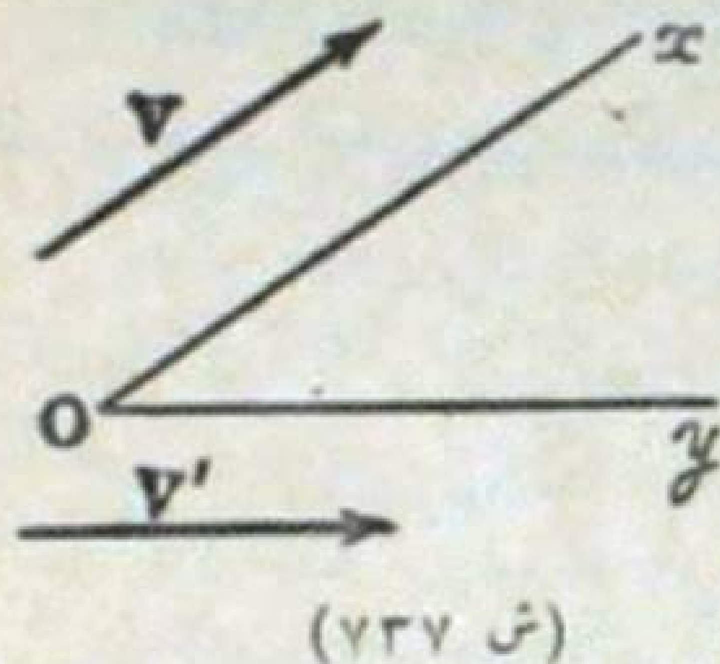
$a=\overline{OP}$ $b=\overline{OQ}$ $c=\overline{OR}$

اعداد جبرى a و b و c را **مؤلفه‌هاى جبرى حامل V** با- هرحاملى كه با V همسنگ باشد مينامند - بامعلوم بودن اعداد جبرى a و b و c حامل آزاد V مشخص ميشود .

۵ - حاصلضرب عددى دوحامل

۹۳۶ - تعريف - حاصلضرب‌عددى دوحامل آزاد عبارتست از حاصلضرب طولهاى آن دوحامل دركسينوس زاويه‌شان.

[توضيح- دوحامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ را درنظرميگيريم وازنقطهٔ دلخواه O دونيم‌خط Ox و Oy را بترتيب‌موازى ومتحدالجهت با آنها رسم ميكنيم. زاويهٔ محدب xOy را زاويهٔ دو حامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ مينامند و اين زاويه را با علامت قراردادى ($\vec{V}$ و $\vec{V'}$) مينمايانند].



(ش ۷۳۷)

حاصلضرب عددى دوحامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ را با علامت قراردادى $\vec{V}\cdot\vec{V'}$ مينمايانند. بنابراين:

$$\vec{V}\cdot\vec{V'}=V\times V'\times\cos(\vec{V}\text{ و }\vec{V'})$$

بايد متوجه بود كه علامت‌قراردادى $\vec{V}\cdot\vec{V'}$ نمايندهٔ يك‌عدد جبريست و نه نمايندهٔ يك كميت هندسى .

۹۳۷ - نتيجه - اولا - حاصلضرب عددى دو حامل بترتيب آنها بستگى ندارد .

$$\vec{V}\cdot\vec{V'}=\vec{V'}\cdot\vec{V}$$

ثانياً برحسب آنكه زاويهٔ دوحامل حاده يامنفرجه باشد حاصلضرب عددى آنها مثبت يامنفى‌است واگر يكى‌از دوحامل صفرباشد يا دوحامل برهم عمود باشند حاصلضرب عددى آنها صفر است.

ثالثاً اگردوحامل همسنگ‌باشند حاصلضرب عددى آنها مساويست با مربع طول مشتركشان و دراينصورت حاصلضرب را **مربع عددى** هريك ازآن حاملها مينامند و مينويسند :

$$\vec{V}\cdot\vec{V}=(\vec{V})^2=V^2$$

رابعاً اگر طول هردو حامل مساوی با واحد باشد حاصلضرب عددی آنها مساویست با کسینوس زاویه‌شان .

خامساً اگر محملهای دوحامل باهم موازی یا برهم منطبق باشند و روی این دومحمل یك‌جهت مثبت اختیار کنیم حاصلضرب عددی دوحامل مساویست با حاصلضرب اندازه‌های جبری دوحامل روی‌محور حاصل وداریم:

$$\vec{V}\cdot\vec{V'}=\overline{V}\times\overline{V'}$$

۹۴۸ - قضیه - اگریکی‌از دو حامل را دریك عدد جبری ضرب‌کنیم حاصلضرب‌عددی دوحامل درهمان‌عدد ضرب‌میشود.

اگر عدد جبری K مثبت باشد زاویهٔ دوحامل تغییر نمیکند ولی‌طول یکی‌از آنها K برابر میشود وبنابراین حاصلضرب عددی دو حامل‌هم در K ضرب میشود .

اگر عدد جبری K منفی باشد کسینوس زاویهٔ دو حامل تغییر علامت میدهد و طول یکی‌از آنها $|k|$ برابر میشود و بنابراین حاصلضرب عددی آنها درعدد جبری k ضرب میشود.

این قضیه را میتوان با یکی‌از دوتساوی زیر تعبیر کرد :

$(k\vec{V})\cdot\vec{V'}=k(\vec{V}\cdot\vec{V'})$ یا $\vec{V}\cdot(k\vec{V'})=k(\vec{V}\cdot\vec{V'})$

۹۴۹ - نتیجهٔ ۱ - اگر دو حامل را در دوعدد جبری ضرب کنیم حاصلضرب عددی آنها در حاصلضرب آندو عدد جبری ضرب میشود.

زیرا :

$$(k\vec{V})\cdot(k'\vec{V'})=k[\vec{V}\cdot(k'\vec{V'})]=k[k'(\vec{V}\cdot\vec{V'})]=kk'(\vec{V}\cdot\vec{V'})$$

۹۴۰ - نتیجهٔ ۲ - اگردوحامل بادومحور موازی باشند حاصلضرب عددی آنها مساویست‌با حاصلضرب اندازه‌های جبری آنها در کسینوس زاویهٔ آندو محور.

فرض‌میکنیم حامل $\vec{AB}$ بامحور X'X و حامل $\vec{A'B'}$ بامحور YY' موازی باشند وحامل واحد محور XX' را $\vec{u}$ و حامل واحد محور Y'Y

را $\vec{u'}$ مینامیم در اینصورت داریم :

$$\vec{AB}=\overline{AB}\times\vec{u} \quad \text{و} \quad \vec{A'B'}=\overline{A'B'}\times\vec{u'}$$

ازینرو حاصل میشود :

$$\vec{AB}\cdot\vec{A'B'}=\overline{AB}\times\overline{A'B'}\,(\vec{u}\cdot\vec{u'})=\overline{AB}\times\overline{A'B'}\times\cos(X'X \text{ و } Y'Y)$$

زیرا $\vec{u}\cdot\vec{u}=\cos(X'X \text{ و } Y'Y)$ (شمارهٔ ۹۳۷ رابعاً)

۹۴۱ - قضیه - هرگاه محمل حامل $\vec{AB}$ بامحوری مانند x'x موازی یا برآن منطبق باشد حاصلضرب عددی حامل $\vec{AB}$ در حامل دیگری مانند $\vec{A'B'}$ مساویست با حاصلضرب اندازهٔ جبری حامل $\vec{AB}$ روی محور x'x دراندازهٔ‌جبری تصویرقائم حامل $\vec{A'B'}$ برمحور x'x

روی محمل حامل $\vec{A'B'}$ همان جهت حامل $\vec{A'B'}$ را جهت مثبت اختیار میکنیم و محور حاصل را y'y مینامیم . نظر بشمارهٔ ۹۴۰ داریم :

$$\vec{AB}\cdot\vec{A'B'}=AB\times\overline{A'B'}\times\cos(x'x \text{ و } y'y)$$

اما $\overline{A'B'}\times\cos(x'x \text{ و } y'y)$ مساویست با اندازهٔ‌جبری تصویرقائم حامل $\vec{A'B'}$ برمحور x'x (شمارهٔ ۹۲۳) و قضیه ثابت است .

۹۴۲ - قضیه - برای بدست‌آوردن حاصلضرب عددی یك حامل‌مانند $\vec{U}$ درمجموع‌هندسی چندحامل‌مانند $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$ کافیست حاصلضرب عددی حامل $\vec{U}$ را در هریك از حاملهای $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ بدست‌آوریم وحاصل‌هارا باهم جمع‌جبری کنیم.

حاصلضرب عددی حامل $\vec{U}$ را در مجموع هندسی $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}$ عدد P مینامیم :

$$P=\vec{U}\cdot(\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3})$$

روی محمل حامل $\overrightarrow{U}$ یك جهت مثبت اختیار میکنیم و محور حاصل را $x'x$ مینامیم در اینصورت نظ بشمارهٔ ٩٤١ عدد P مساویست با حاصلضرب اندازهٔ جبری حامل $\overrightarrow{U}$ در اندازهٔ جبری تصویر قائم مجموع هندسی $\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}$ برمحور $x'x$ اما نظر بقضیهٔ تصاویر (شمارهٔ ٩٣١) اندازهٔ جبری تصویر قائم مجموع هندسی $\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}$ بر $x'x$ مساویست با مجموع اندازههای جبری تصاویر حاملهای $\overrightarrow{V_1}$ و $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$ بر $x'x$ و اگر اندازههای جبری این تصاویر را بترتیب $\overline{V'_1}$ و $\overline{V'_2}$ و $\overline{V'_3}$ بنامیم داریم:

$$P=\overline{U}\times(\overline{V'_1}+\overline{V'_2}+\overline{V'_3})=\overline{U}\times\overline{V'_1}+\overline{U}\times\overline{V'_2}+\overline{U}\times\overline{V'_3}$$

ونظر بشمارهٔ ٩٤١

$$P=\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V_3}$$

وقضیه ثابت است.

٩٤٣ - اگر قضیهٔ فوقرا دو دفعهٔ متوالی بکار بریم نتیجه میشود که:

برای بدست آوردن حاصلضرب عددی دو مجموع هندسی کافیست حاصلضرب عددی هریك از حاملهای مجموع اول را درهریك از حاملهای مجموع دوم بدست آوریم و حاصلها را باهم جمع جبری کنیم.

$$(\overrightarrow{U_1}+\overrightarrow{U_2})\cdot(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2})=\overrightarrow{U_1}\cdot\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{U_1}\cdot\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{U_2}\cdot\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{U_2}\cdot\overrightarrow{V_2}$$

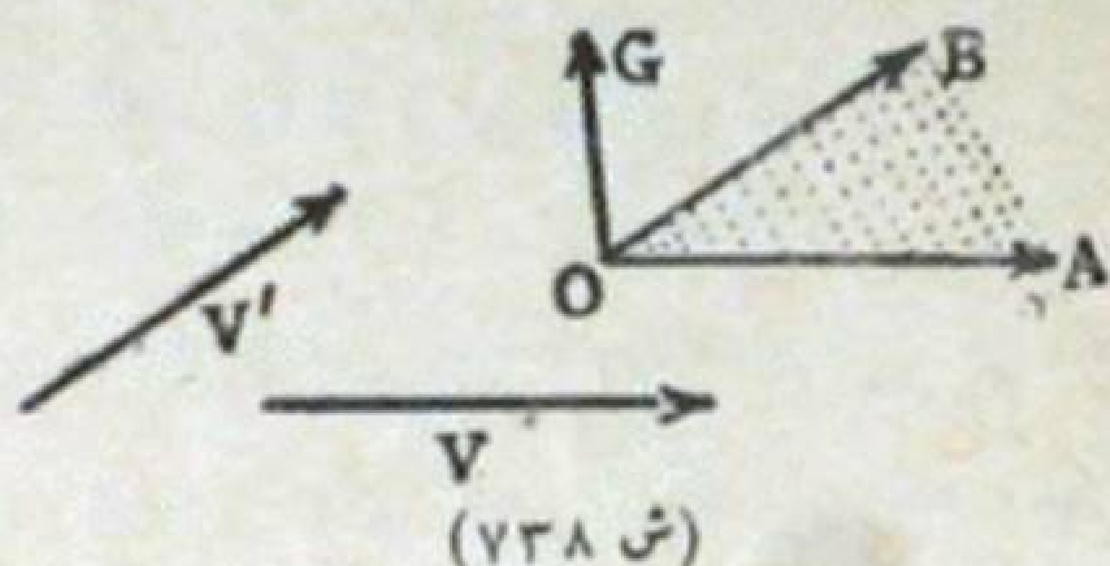
٦ - حاصلضرب حاملی دوحامل

٩٤٤ - تعریف - دوحامل آزاد $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{V'}$ را که محملهایشان برهم منطبق یا باهم موازی نیست درنظرمیگیریم و ازنقطهٔ دلخواه O حاملهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را بترتیب همسنگ باآنها رسم میکنیم (ش ٧٣٨) **حاصلضرب حاملی حامل V درحامل V' حاملی است مانند $\overrightarrow{OG}$ که بطریق زیر بدست میآید:**

محمل حامل $\overrightarrow{OG}$ را برصفحهٔ AOB عموداختیارمیکنیم - جهت حامل $\overrightarrow{OG}$ را: طوری اختیار میکنیم که کنج سه وجهی $O.ABG$ مستقیم ✡ باشد - طول حامل $\overrightarrow{OG}$ را مساوی با

$$V\times V'\sin(V \text{ و } V')$$

یعنی مساوی با دو برابر عددی که مساحت مثلث AOB را مینمایاند اختیار میکنیم.



(ش ٧٣٨)

حاصلضرب حاملی حامل $\overrightarrow{V}$ را درحامل $\overrightarrow{V'}$ باعلامت قراردادی $\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V'}$ مینمایانند. واضح است که اگر بجای نقطهٔ O نقطهٔ دیگری مانند O' اختیار کنیم حامل $\overrightarrow{O'G'}$ که با $\overrightarrow{OG}$ همسنگ است بدست میآید.

هریك از حاملهای $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{V'}$ را یك عامل حاصلضرب حاملی مینامند.

٩٤٥ - نتیجه - **اولا** - حاصلضرب حاملی حامل $\overrightarrow{V}$ در حامل $\overrightarrow{V'}$ وحاصلضرب حاملی حامل $\overrightarrow{V'}$ درحامل $\overrightarrow{V}$ دوحامل متقابل هستند وداریم:

$$\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V'}=-(\overrightarrow{V'}\wedge\overrightarrow{V})$$

ثانیاً حاصلضرب حاملی درصورتی صفر است که لااقل یکی از دو عامل آن صفر باشد یا دو عامل دارای یك راستای مشترك باشند.

✡ درشمارهٔ ٦٥٦ مقالهٔ پنجم دیدیم که: اگر یکی از سه یال کنج سه وجهی $S.ABC$ مثلا SA را یال اول ویکی دیگر مثلا یال SB را یال دوم وبالاخره SC را یال سوم بنامیم و فرض کنیم شخص ناظری در راستای یال SA که یال اول است بایستد بطوریکه پایش در S و سرش بطرف A باشد و وجه SBC را نگاه کند هرگاه یال دوم یعنی SB در طرف راست و یال سوم یعنی SC در طرف چپ ناظر مزبور واقع باشد میگویند که جهت کنج $S.ABC$ مستقیم است.

ثالثاً هر گاه طول هردو حامل $\vec{V}$ و $\vec{V'}$ مساوی با واحد باشد حاصلضرب حاملی $\vec{V}\wedge\vec{V'}$ مساویست با $\sin(\vec{V}$ و $\vec{V'})$

۹۴۶ - قضیه - اگر یکی از دو عامل یك حاصلضرب حاملی را در یك عدد جبری مانند k ضرب کنیم حاصلضرب حاملی در آن عدد جبری ضرب میشود.

اگر عدد جبری k مثبت باشد جهت حاملها تغییر نمی‌پذیرد وجهت $\vec{OG}$ نیز تغییر نمیکند اما چون طول OG در k ضرب میشود حامل $\vec{OG}$ نیز در عدد k ضرب میشود.

اگر عدد جبری k منفی باشد جهت حاملی که در k ضرب میشود تغییر میکند و بنابراین جهت حامل $\vec{OG}$ نیز تغییر میکند و چون طول حامل $\vec{OG}$ در $|k|$ ضرب میشود حامل $\vec{OG}$ نیزدرعدد جبری k ضرب‌میشود.

۹۴۷-نتیجه-اگر دو عامل یك حاصلضرب حاملی را در دو عدد جبری ضرب کنیم حاصلضرب حاملی در آن دو عدد ضرب میشود

کافیست دومرتبهٔ متوالی قضیهٔ ۹۴۶ را بکار بریم:

$$(k\vec{V})\wedge(k'\vec{V'})=k[\vec{V}\wedge(k'\vec{V'})]=kk'(\vec{V}\wedge\vec{V'})$$

۹۴۸ - ثابت میکنند که:

$$(\vec{U}_1+\vec{U}_2)\wedge(\vec{V}_1+\vec{V}_2)$$

$$=\vec{U}_1\wedge\vec{V}_1+\vec{U}_1\wedge\vec{V}_2+\vec{U}_2\wedge\vec{V}_1+\vec{U}_2\wedge\vec{V}_2$$

پایان

فهرست بخش سوم



فهرست اسامی بعض کتابهاییکه مورد استفاده قرار داده‌ایم

۱ - التفهیم لاوائل صناعة‌التنجیم تألیف استاد ابوریحان محمدبن احمد بیرونی (با تصحیح و مقدمه و شرح و حواشی استاد محترم جناب آقای جلال همائی)

2 – Leçons de Géométrie élémentaire par Jacques Hadamard (2 volumes)

3 – Traité de Géométrie par C · Guichard (2 volumes)

4 – Leçons de Géométrie par H · Commissaire

5 – Grand Mémento Larousse (Tome second)

6 – Géométrie par R · Deltheil et D · Caire

7 – Cours de Géométrie par P · Chenevier (3 volumes)

8 – Géométrie par Maillard et Millet (3 volumes)

9 – Cours de Géométrie par R · Estève et H · Mitault (3 volumes)

10 – Géométrie plane et dans l'espace par C · Lebossé et C · Hémery (2 volumes)

11 – Géométrie par F · Brachet et J · Dumarqué (3 volumes)

12 – Géométrie par A · Benoit (3 volumes)

13 – Eléments de géométrie par Ch · Vacquant et A Macé de Lépinay

14 – Exercices de Géométrie par Th · Caronnet (9 volumes)

15 – Géométrie par R · Cluzel et J · P · Robert (4 volumes)

16 – Exercices de Géométrie Moderne par G · Papelier (8 volumes)

17 – Géométrie par G · Leconte (3 volumes)

فهرست تألیفات آقایان ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری

دورهٔ هندسه

۱ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها

۲ - « دوم « دوم «

۳ - « سوم « سوم «

٤ - « چهارم « چهارم «

۵ - هندسهٔ فضایی برای سال پنجم دبیرستانها و دانشسراهای مقدماتی

۷ - هندسهٔ مسطحه برای دانشسراهای مقدماتی **وسال ششم ریاضی**

۸ - **مخروطات وحاملها** برای سال ششم ریاضی

هیئت برای سال پنجم دبیرستانها ودانشسراهای مقدماتی

دورهٔ حساب

۹ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها

۱۰ - « دوم « دوم «

۱۱ - حساب استدلالی برای دانشسراهای مقدماتی «وسال» ششم ریاضی

دورهٔ جبر

۱۲ - جلد اول برای سال دوم دبیرستانها

۱۳ - « دوم « « سوم «

۱٤ - « سوم « « چهارم «

۱۵ - کتاب جبر برای سالهای پنجم وششم (ریاضی وطبیعی)

۱٦ - **جبر** برای دانشسراهای مقدماتی

دورهٔ مثلثات

۱۷ - جلد اول برای سال چهارم دبیرستانها

۱۸ - جلددوم « « پنجم «

۱۹ - جبر ومثلثات

۲۰و۲۱ - **حل المس**... تا پنجم دبیرستانها
دردوجلد

۲۲ - **حل المسائل** ... آقای ابوالقاسم قربانی

۲۳ - **روش حل مسائل هندسه** برای دانش آموزان دبیرستانها

۲٤ - **جدولهای لگاریتم**

۲۵ - **حل المسائل** جبر جلد اول برای سالهای دوم وسوم وچهارم دبیرستانها

۲٦ - رسم فنی برای دورهٔ دوم دبیرستانها

۲۷ - **هندسهٔ دبستان**

۲۸ و۲۹ - **حساب دبستان** دردوجلد

۳۰ - **نه مقالهٔ هندسهٔ** دریک جلد

فهرست تألیفات آقایان ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری

دورهٔ هندسه
۱ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها
۲ - » دوم » دوم »
۳ - » سوم » سوم »
٤ - » چهارم » چهارم »
۵ - هندسهٔ فضایی برای سال پنجم دبیرستانها و دانشسراهای مقدماتی
۷ - هندسهٔ مسطحه برای دانشسراهای مقدماتی **وسال ششم ریاضی**
۸ - **مخروطات وحاملها** برای سال ششم ریاضی
هیئت برای سال پنجم دبیرستانها ودانشسراهای مقدماتی

دورهٔ حساب
۹ - جلد اول برای سال اول دبیرستانها
۱۰ - » دوم » دوم »
۱۱ - حساب استدلالی برای دانشسراهای مقدماتی و سال ششم ریاضی

دورهٔ جبر
۱۲ - جلد اول برای سال دوم دبیرستانها
۱۳ - « دوم « سوم «
١٤ - « سوم « چهارم «
۱۵ - کتاب جبر برای سالهای پنجم وششم (ریاضی وطبیعی)
١٦ - **جبر** برای دانشسراهای مقدماتی

دورهٔ مثلثات
۱۷ - جلد اول برای سال چهارم دبیرستانها
۱۸ - جلددوم « « پنجم «
۱۹ - جبر ومثلثات ...
۲۰و۲۱ - **حل المسـ**... تا پنجم دبیرستانها دردوجلد
۲۲ - **حل المسائل** ... آقای ابوالقاسم قربانی
۲۳ - **روش حل مسائل هندسه** برای دانش آموزان دبیرستانها
٢٤ - **جدولهای لگاریتم**
۲۵ - **حل المسائل** جبر جلد اول برای سالهای دوم وسوم وچهارم دبیرستانها
٢٦ - رسم فنی برای دورهٔ دوم دبیرستانها
۲۷ - **هندسهٔ دبستان**
۲۸ و۲۹ - **حساب دبستان** دردوجلد
۳۰ - **نه مقالهٔ هندسهٔ** دریك جلد

